

Spis treści

Przedmowa	7
1. Cyfry, liczby i błędy – podstawy analizy numerycznej	11
1.1. Systemy liczbowe.....	11
1.2. Binarna reprezentacja zmiennoprzecinkowa	16
1.3. Arytmetyka zmiennopozycyjna.....	18
1.4. Błędy w obliczeniach numerycznych.....	21
1.5. Błędy skrótów i zaokrągleń	24
1.6. Cyfry poprawne i znaczące	27
1.7. Przenoszenie się błędów w obliczeniach numerycznych	28
1.8. Uwarunkowanie zadania numerycznego	33
1.9. Stabilność numeryczna algorytmu	37
1.10. Złożoność obliczeniowa algorytmu.....	40
2. Rozwiązywanie układów równań liniowych i rozkład trójkątny macierzy kwadratowej.....	45
2.1. Układy równań liniowych	45
2.2. Eliminacja Gaussa	47
2.3. Kontrola poprawności obliczeń w eliminacji Gaussa.....	57
2.4. Złożoność obliczeniowa eliminacji Gaussa.....	62
2.5. Zastosowania rozkładu trójkątnego	66
2.6. Błędy rozwiązania układu równań liniowych metodą eliminacji Gaussa	70
2.7. Inne metody rozwiązywania układów równań liniowych	75
3. Aproksymacja i interpolacja	77
3.1. Modelowanie na podstawie danych cyfrowych.....	77
3.2. Liniowe zadanie aproksymacji średniokwadratowej.....	79
3.3. Wielomiany Czebyszewa	84
3.4. Aproksymacja jednostajna	86
3.5. Interpolacja wielomianowa	90
3.6. Ocena jakości interpolacji – reszta wzoru interpolacyjnego i zjawisko Rungego	98
3.7. Odcinkowa interpolacja wielomianowa	105
3.8. Interpolacja funkcji wielu zmiennych	108
3.9. Obliczanie wartości wielomianu	112
4. Różniczkowanie numeryczne i ekstrapolacja Richardsona	119
4.1. Podstawowe wzory różniczkowania numerycznego	119
4.2. Numeryczne przybliżenie drugiej pochodnej	121
4.3. Dokładniejsze wzory przybliżające pochodną	122
4.4. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych.....	123
4.5. Błędy zaokrągleń w różniczkowaniu numerycznym.....	124
4.6. Iterowana ekstrapolacja Richardsona	126

5. Całkowanie numeryczne.....	133
5.1. Kwadratury proste i złożone	133
5.2. Kwadratury Newtona-Cotesa	134
5.3. Kwadratury Gaussa	136
5.4. Kwadratury złożone	138
5.5. Kwadratury adaptacyjne.....	141
6. Iteracyjne metody rozwiązywania równań nieliniowych.....	143
6.1. Właściwości metod iteracyjnych	143
6.2. Metoda bisekcji.....	147
6.3. Metoda iteracji prostej	148
6.4. Metoda Newtona-Raphsona.....	149
6.5. Metoda siecznych	162
6.6. Metoda <i>regula falsi</i>	164
6.7. Odwrotna interpolacja kwadratowa (Inverse Quadratic Interpolation – IQI)	165
6.8. Złożone metody rozwiązywania równań nieliniowych	167
6.9. Uwarunkowanie pierwiastków równań nieliniowych.....	167
6.10. Układy równań nieliniowych	174
6.11. Metoda Newtona-Raphsona dla układów równań.....	175
6.12. Metoda Broydena	177
6.13. Rozwiązywanie układów równań nieliniowych drogą minimalizacji	179
6.14. Iteracyjne metody rozwiązywania układów równań liniowych	180
7. Pierwiastki wielomianów.....	183
7.1. Operacje na wielomianach	183
7.2. Deflacja	185
7.3. Metoda Newtona-Raphsona i jej warianty	185
7.4. Inne podejścia do wyznaczania pierwiastków wielomianów	191
7.5. Kombinowane algorytmy wyznaczania pierwiastków wielomianu	195
7.6. Uwarunkowanie pierwiastków wielomianów	195
8. Wartości i wektory własne.....	197
8.1. Definicje.....	197
8.2. Uwarunkowanie wartości własnych.....	200
8.3. Wyznaczanie wartości własnych z wielomianu charakterystycznego.....	202
8.4. Metoda potęgowa	204
8.5. Metoda QR wyznaczania wartości własnych	207
8.6. Wartości szczególne macierzy	211
8.7. Zastosowania wartości własnych i szczególnych.....	214
9. Równania różniczkowe zwyczajne	225
9.1. Zagadnienie początkowe	225
9.2. Numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego.....	229
9.3. Liniowe równania różniczkowe.....	234
9.4. Schematy różnicowe jednokrokowe niskiego rzędu i ich najważniejsze cechy	236
9.5. Metody Rungego-Kutty.....	247

9.6. Sterowanie długością kroku w metodach jednokrokowych	250
9.7. Metody wielokrokowe	253
9.8. Metody Adamsa.....	259
9.9. Metody wstecznego różniczkowania	264
9.10. Jak dopasować metodę numerycznego rozwiązania zagadnienia początkowego do specyfiki zadania?	268
Dodatki	
D1. Liczby i wektory	275
D2. Podstawy rachunku macierzowego	285
D3. Elementy analizy matematycznej.....	291
Bibliografia	295
Indeks terminów	297
Indeks nazwisk.....	303

Przedmowa

W polskiej terminologii używa się nazw **analiza numeryczna** i **metody numeryczne** wymiennie. Przedmiot analizy numerycznej można zdefiniować dwojako:

- po pierwsze, to nauka zajmująca się rozwiązywaniem problemów matematycznych metodami arytmetycznymi,
- po drugie, to sztuka doboru spośród wielu możliwych procedur takiej, która jest „najlepiej” dostosowana do rozwiązania konkretnego zadania.

Wiele problemów matematycznych i inżynierskich jest dokładnie rozwiązywanym metodami analizy matematycznej, z użyciem abstrakcyjnych pojęć i narzędzi. Metoda numeryczna prowadzi do uzyskania przybliżonego rozwiązania takich zadań sposobami, które są dostępne maszynie cyfrowej, czyli przede wszystkim przez wykonywanie operacji arytmetycznych. Nie wystarczy procedurę numeryczną zaprojektować, trzeba jeszcze zbadać jej właściwości. W takim rozumieniu (projektowanie metod numerycznych i badanie ich właściwości) analizę numeryczną można uważać za część matematyki, a do jej wyników dochodzi się, stosując aparat pojęciowy i narzędzia matematyki.

Z reguły, dla jednego problemu dysponujemy kilkoma metodami numerycznymi. Trzeba wybrać jedną z nich i zaimplementować. To znaczy, biorąc pod uwagę zasoby sprzętowe i oprogramowanie, które są do dyspozycji, utworzyć algorytm, który zrealizuje obliczenia i wygeneruje wynik, który świadomie zaakceptujemy. Przy wyborze i implementacji metody numerycznej bierze się pod uwagę liczne czynniki i przesłanki, wśród których jest specyfika urządzenia cyfrowego realizującego obliczenia, sposób reprezentacji danych wejściowych i wyników, czas obliczeń, zasoby pamięci i wiele innych, wraz z najważniejszą: świadomością celu wykonywanych obliczeń. Wielu uważa, że ta sztuka stosowania metod numerycznych, łącząca znajomość ich matematycznie udowodnionych właściwości, zrozumienie rozwiązywanego problemu, wiedzę o sprzęcie, algorytmikę i programowanie, to nowa dziedzina określana terminem *scientific computing* albo *computational science*.

Analiza numeryczna jest niezbędna we wszystkich naukach, w których wykorzystujemy cyfrowe urządzenia liczące. W każdej sytuacji, w której stosujemy maszynę cyfrową do wykonania obliczeń, ciąży na nas obowiązek analizy dokładności i przydatności otrzymanego wyniku.

Materiał przedstawiony w tej książce to wybrane przez autorów metody numeryczne prezentowane studentom różnych kierunków studiów inżynierskich w trakcie wykładów, ćwiczeń i laboratoriów. Mamy nadzieję, że przygotowane w zwartej postaci podstawowe informacje z analizy numerycznej ułatwią studentom usystematyzowanie i przyswojenie wiedzy. Uczestnictwo w wykładzie,

ćwiczeniach i laboratoriach umiejscowi tę wiedzę w kontekście zastosowań oraz pozwoli na rozwinięcie praktycznych umiejętności.

Chcielibyśmy podkreślić, że opanowanie i stosowanie analizy numerycznej obejmuje nie tylko poznanie i zrozumienie arsenału metod i sposobów na uzyskanie przybliżonych rozwiązań problemów matematycznych i inżynierskich. Chcielibyśmy zwrócić uwagę studentów i czytelników tej książki na kilka podstawowych zasad i kluczowych pojęć, które stanowią o istocie analizy numerycznej:

1. Wszelkie metody numeryczne obarczone są błędami różnego rodzaju, pochodzenia i znaczenia. Bez analizy tych błędów, zrozumienia ich źródeł i wagi w otrzymanym wyniku metoda numeryczna jest bezużyteczna.
2. Zbieżność wyników metody numerycznej do dokładnego rezultatu jest jej kluczową cechą. Badanie tej zbieżności jako funkcji parametrów metody pozwala na świadome stosowanie metody numerycznej w sposób dopasowany do naszych celów.
3. Złożoność numeryczna algorytmów realizujących metodę numeryczną jest miarą zasobów obliczeniowych koniecznych do ich wykonania i ma kluczowe znaczenie dla oceny możliwości zastosowania tej metody w konkretnej sytuacji.
4. Uwarunkowanie problemów numerycznych, czyli miara wrażliwości wyniku na zmiany lub błędy danych wejściowych, decyduje o tym, które zadania można rozwiązać, a których należy unikać.
5. Metody numeryczne powinny być stosowane tak, by uzyskać rozwiązanie spełniające narzucone wymagania przy jak najmniejszej liczbie wykonanych operacji arytmetycznych.
6. Obliczeń numerycznych nie wolno wykonywać bezmyślnie, a ich wyników akceptować bezrefleksyjnie.

Będziemy się odnosić do tych zasad w kolejnych rozdziałach.

Poza przydatnością poszczególnych metod numerycznych do rozwiązania powszechnie spotykanych problemów inżynierskich, nauka analizy numerycznej jest doskonałą szkołą myślenia algorytmicznego. Zapraszamy do lektury i samodzielnych, aktywnych studiów.

Książka składa się z dziewięciu rozdziałów i trzech dodatków. Dodatki zawierają podstawy algebry i analizy matematycznej, które mieszczą się w materiale wykładanym zwykle na pierwszych semestrach studiów inżynierskich. Zostały zebrane w jednym miejscu wiadomości, do których bezpośrednio odwołano się w tekście.

Każdy z dziewięciu rozdziałów stanowi odrębną całość i może być czytany oddzielnie. Twierdzenia, definicje i przykłady zaznaczono w tekście. Definicje i twierdzenia porządkują podstawowe fakty, które są wykorzystane w konstrukcji metod numerycznych. Te twierdzenia, które umieszczono bez dowodu zaopa-

trzone w odsyłacze do podającej je literatury. Wyprowadzenia metod numerycznych, analiza ich właściwości i dyskusja przydatności stanowią główny nurt książki i nie zamykano ich w formie twierdzeń. Przykłady ilustrujące podstawowe pojęcia i właściwości są proste, często tak by umożliwić ich natychmiastowe przeliczenie przez czytelnika. Podano też przykłady ilustrujące wyjątki i sytuacje awaryjne metod numerycznych. Algorytmy dodatkowe i pomocnicze umieszczono w ramkach wydzielających je z tekstu.

Zamieszczona bibliografia zawiera przede wszystkim tytuły w języku polskim, które mogą być wykorzystane do pogłębienia wiadomości. Podano też te pozycje anglojęzyczne, z których zaczerpnięto twierdzenia niedostępne w polskiej literaturze. Nie było celem autorów kompletowanie pełnej bibliografii przedmiotu, bo ta byłaby bardzo obszerna.

Autorzy