Spis treści

Wstęp

Autor niniejszego tekstu rozpoczynał studia matematyczne w 1973 r. na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego. Kurs *Analizy* w ramach I roku studiów wychodził od aksjomatyki liczb rzeczywistych i wspierany był przez równoległe kursy *Podstaw Logiki i Teorii Mnogości* oraz *Algebry*, w znacznej mierze abstrakcyjnej. Wprawdzie od strony nazw kursów niewiele się w ciągu minionych ponad 40 lat zmieniło, ale zmienili się studenci. Dokładniej – absolwenci szkół średnich dysponują obecnie zupełnie odmiennym bagażem doświadczeń i umiejętności oraz nawyków myślenia, co można nazwać w skrócie „wiedzą". Po wielu zmianach podstawy programowej w szkołach średnich, po zmianie koncepcji egzaminów maturalnych i tego, jak należy rozumieć egzamin „zdany", możemy zachwycać się coraz lepszymi wynikami uzyskiwanymi przez młodzież w kolejnych testach – lub niepokoić coraz częściej obserwowanym brakiem umiejętności myślenia abstrakcyjnego, czy też po prostu *logicznego myślenia*. Wykładowcy starający się przedstawić studentom 1–2 roku podstawy myślenia matematycznego zderzają się – po stronie początkujących studentów – z problemami postaci: co różni definicję od twierdzenia? co takiego zawiera dowód, że ma być uznany za uzasadnienie akurat tego, a nie innego twierdzenia? Na czym polega *rozumowanie*, czyli kolejne zdania i wzory prowadzące od wypisanych wcześniej *założeń* do sformułowanej niżej *tezy*? Co to znaczy, że jakieś twierdzenie jest *wnioskiem* z innego?

Zatrzymajmy się przy uproszczonym opisie dość powszechnego, naturalnego dualizmu związanego z nauczaniem matematyki. Podejście *praktyczne*, właściwe dla studiów inżynierskich, zakłada uzyskanie jak najszybszej umiejętności wykonywania poprawnych obliczeń służących rozwiązywaniu konkretnych, coraz bardziej skomplikowanych problemów. Podejście bardziej *teoretyczne*, właściwe dla matematyki jako kierunku studiów, stara się rozwijać umiejętność analizy grup podobnych zagadnień dla rozpoznawania istotnych analogii i wybór twierdzeń stopniowo prowadzących do rozwiązania. Pierwsza droga wymaga zapamiętania wielu konkretnych sposobów postępowania – przykładów i ćwiczeń, druga – wielu twierdzeń wraz z praktycznym zakresem ich stosowalności.

W prezentowanym czytelnikowi tekście staram się przedstawić w możliwie spójny i prosty sposób podejście zdecydowanie teoretyczne, choć istotną część kursu stanowią rozważania i oszacowania dotyczące praktycznej (czyli także – przybliżonej) obliczalności wprowadzanych stopniowo pojęć. Uprzedzam, że czytelnik nie znajdzie tu jednak *aksjomatycznej konstrukcji* zbioru liczb rzeczywistych. W istocie, przyjmując za punkt wyjścia wiedzę „szkolną" w zakresie podstawowych działań na liczbach rzeczywistych, ograniczamy się do sformułowania jedynie trzech aksjomatów związanych z relacją porządku $x < y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ – resztą zajmuje się przecież każdy równoległy kurs *Algebry*. Pozwala to na stopniowe wprowadzanie niezbędnego w matematyce poziomu precyzji, a celem takiej koncepcji jest obniżenie bariery abstrakcji, jaką dla absolwenta szkoły średniej stanowi niewypowiedziana reguła: zapomnijcie o wszystkim, czego się do tej pory dowiedzieliście o liczbach – Matematyka zaczyna się dopiero teraz.

Wybrane, wyróżnione w tekście aksjomaty (wśród nich aksjomat ciągłości) pozwalają na stopniowe, precyzyjne wprowadzanie klasycznego zbioru pojęć wchodzących w skład podstaw *Analizy* obejmującego kresy $\sup A, \inf A$ zbiorów $A \subset \mathbb{R}$, potęgę a^b liczby $a > 0$ o dowolnym wykładniku rzeczywistym b, ciągi liczbowe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i ich granice $\lim_n a_n$, granice górne $\limsup_n a_n$ i dolne $\liminf_n a_n$ itd.

Zakładam, że z wyjątkiem samego zbioru $\mathbb{R}$ początkujący student znajdzie w prezentowanym tekście definicje wszystkich kolejno wprowadzanych pojęć – jednoznaczne i możliwie proste, odpowiadające na pytanie: co to jest? jak to rozpoznać, sprawdzić, wyznaczyć? Czytelnik bardziej zaawansowany zauważy, że to nieco „karkołomne" zadanie staram się realizować poprzez celowy wybór – spośród dostępnych (równoważnych!) definicji wybieram takie, których treść i wbudowanie w logiczną strukturę kursu wiążą się z minimalnym bagażem przygotowań. Czytelnik bardziej krytyczny oceni, czy uzyskany efekt jest wart wysiłku i choć w części jest zgodny z deklarowanym zamiarem.

Zatrzymałem się przy definicjach, gdyż ich znajomość postrzegam jako filar wszelkiego matematycznego rozumowania, a podstawowym, niestety, problemem studenta na przeciętnym egzaminie jest próba wyjaśnienia, co znaczą symbole i nazwy, których używa. Kolejnym filarem są oczywiście twierdzenia – formułowane w wersji zgodnej z logiczną strukturą wykładu – niekoniecznie najbardziej ogólnej. Od prezentowanych w tekście twierdzeń (oraz stwierdzeń mniejszej rangi, wniosków i lematów) oczekujemy weryfikowalności założeń, oraz tego, by postulowana teza stanowiła jednostkowy ważny wynik lub – by była możliwa do zastosowania w przykładach i kolejnych, powiązanych logicznie twierdzeniach. Wymaganie, by definicje oraz podstawowy zestaw twierdzeń zostały trwale zapamiętane przez studenta – wraz z logicznymi powiązaniami przyswojonych pojęć – jest zapewne staroświeckie i w świecie Internetu i przy aktualnie obowiązujących koncepcjach metodycznych wydaje się całkowicie nierealistyczne. No cóż, nie każdy student matematyki zostaje matematykiem. Zainteresowani znajdą w tekście także dowody twierdzeń – wszystkich klasycznych i tych trudniejszych. Pominięte zostały – właściwe dla *Algebry* dowody Twierdzeń 10.6.5 i 10.6.4 o rozkładzie: wielomianu na czynniki (st. 1–2), a funkcji wymiernej na ułamki proste. Wyjątek stanowi także sformułowane w ostatnim rozdziale twierdzenie 11.2.2 o istnieniu i jednoznaczności miary Lebesgue'a (na prostej i na płaszczyźnie), którego pełna wersja powinna się pojawić w bardziej zaawansowanym kursie *Teorii miary i całki*. Brak dowodu twierdzenia nie przeszkadza, by korzystać ze stosownej definicji i – w szczególności – by wyznaczać miarę konkretnych, ważnych w analizie zbiorów.

Proponując realny wykład *Analizy I* oparty na przygotowanym tekście zakładam świadomą i dość rozległą redukcję liczby dowodów prezentowanych w ramach wykładu twierdzeń. Dla odmiany, zdecydowanie odradzam pomijanie poszczególnych twierdzeń – zarówno ich treść jak i konsekwencje dające odpowiedzi na pojawiające się wcześniej pytania oraz nadające kierunek dalszym rozdziałom stanowią siatkę powiązań, na której zbudowana jest *Matematyka*, w szczególności *Analiza*, również ta bardziej zaawansowana. Wybrane, bardziej elementarne lub wzorcowe dowody są oczywiście potrzebne już na początku nauki – jeżeli mogą być „zrozumiane", przyswojone przez początkującego studenta. Zakładam, że materiał wykładowy kursu *Analizy* jest niezbędny w ciągu całego okresu nauki, a po osiągnięciu wyższego poziomu kultury matematycznej student kolejnych lat będzie mógł (i potrzebował) wrócić do poznanego wstępnie materiału, by odszukać szczegóły rozumowania, które na I roku niekoniecznie było dla niego czytelne. Niektóre, szczególnie proste dowody pojawiają w tekście jako ćwiczenia do samodzielnego wykonania (i sprawdzenia w ramach ćwiczeń).

Prezentowany tu kurs *Analizy I* ogranicza się do wybranej grupy tematów obejmujących ciągi, szeregi i tzw. analizę funkcji 1 zmiennej rzeczywistej. Czytelnika szukającego piękna i szerokiego spojrzenia na analizę zachęcam do przestudiowania pozycji [4] oraz podanej tam bardzo rozległej bibliografii. Za stosunkowo bliskie i inspirujące uważam podejście zawarte w [2]. Ważniejsze różnice w stosunku do klasycznych podręczników *Analizy* – oprócz wspomnianej już redukcji aksjomatyki – sprowadzają się w zasadzie do istotnej zmiany kolejności i nieco odmiennego rozłożenia akcentów. W szczególności:

- Rozdział 1 zawiera dwie wyodrębnione własności zbioru liczb dodatnich i nakazuje je traktować jako aksjomaty. Jest to próba zredukowania – do dwu – standardowych, znanych własności algebraicznych relacji mniejszości (i większości); przy okazji pojawia się pytanie o to, czy zbiór $R^+ \subset \mathbb{R}$ jest jedynym podzbiorem o wyróżnionych własnościach. Dodatkowy *aksjomat ciągłości* oznacza istnienie kresów dolnych – ale tylko w odniesieniu do półprostych ograniczonych z dołu. Dla liczb naturalnych formułujemy charakteryzującą je zasadę indukcji, a dla liczb rzeczywistych definiujemy rozwinięcie dziesiętne. Jest to podstawowy, wykorzystywany w dalszych rozdziałach przykład ciągu i jednocześnie szeregu.

- Szczegółowa konstrukcja potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym zawiera dowód istnienia pierwiastka $n-$go stopnia i stanowi w rozdziale 2 główne praktyczne zastosowanie kresów (górnych i dolnych).

- Pojęcia ciągu i granicy od samego początku korzystają z przykładów, będących w istocie szeregami; rozdział 3 zawiera przedstawienie liczby Eulera e jako granicę każdego z ciągów $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ i $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$, dla $n \in \mathbb{N}$.

- Rozdział 4 wprowadza granice górną i dolną – z wykorzystaniem kresów, bez odniesień do zdefiniowanego później pojęcia punktu skupienia; kulminacją rozdziału jest oczywiście twierdzenie Bolzano–Weierstrassa, ale także – własności ogólnej funkcji wykładniczej i wzór $e^x = \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

- Szeregi pojawiają się w rozdziale 5 jako w szczególny sposób zapisane ciągi liczbowe; właściwe dla szeregów specyficzne metody badania zbieżności rozszerzamy o przekształcenie Abela i kryterium Dirichleta; badając szeregi bezwzględnie zbieżne wyprowadzamy rozwinięcie funkcji e^x dla $x \in \mathbb{R}$ w szereg potęgowy, a dla ogólnych szeregów potęgowych ustalamy pojęcie przedziału zbieżności.

- Rozdział 6 korzysta z pojęcia ciągłości funkcji (w oparciu o ciągową definicję Heinego) i opisuje wynikające stąd własności – w tym związaną z monotonicznością ciągłość funkcji odwrotnych; przegląd funkcji elementarnych, uzupełniony o jednoznaczną charakteryzację funkcji *sinus* i *kosinus*, prowadzi do wzorów rozwijających te funkcje w szereg; wykazujemy ciągłość każdej funkcji będącej sumą szeregu potęgowego (w przedziale zbieżności).

- Granice funkcji pojawiają się w rozdziale 7 i są poprzedzone wprowadzeniem do topologii obejmującym zbiory otwarte i domknięte oraz F_σ i G_δ, co pozwala dalej rozważać zbiory punktów nieciągłości dowolnej funkcji; badanie granic (właściwych i niewłaściwych) rozszerza się na asymptoty; rozdział kończy konstrukcja funkcji monotonicznych o dowolnym przeliczalnym zbiorze punktów nieciągłości.

- Pochodna funkcji badana jest w rozdziale 8, gdzie w pierwszej kolejności pokazujemy różniczkowalność każdej funkcji rozwijalnej w szereg potęgowy; własności pochodnej sprawdzamy korzystając z pojęcia funkcji przyrostowych, a ścisły związek różniczkowalności z monotonicznością pozwala na uzyskanie wstępnej wersji wzoru Stirlinga; badanie funkcji obejmuje zestaw twierdzeń związanych z wypukłością, oraz prowadzi do klasycznych reguł de L'Hôpitala wyznaczania granic wyrażeń nieoznaczonych.

- Dla funkcji $n-$krotnie różniczkowalnych definiujemy w rozdziale 9 wielomian Taylora – z resztą w postaci Lagrange'a; nieco odmienne metody potwierdzają zbieżność szeregu dwumianowego – rozwinięcia funkcji potęgowej $(1+x)^a$ dla $|x|<1, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Obliczenia numeryczne i próby oceny błędów przybliżeń pojawiają się w tekście wielokrotnie, a w rozdziale 9 zostały dodatkowo zebrane i wyodrębnione; wyróżniamy podstawowe metody numerycznego różniczkowania funkcji, a szczegółowo omówione metody Picarda i Newtona stosuje się do przybliżonego rozwiązywania równań.

- Zdefiniowana w rozdziale 10 całka Riemanna korzysta z sum Darboux pomijających wartości funkcji w punktach podziału, co upraszcza niektóre dowody; zestaw podstawowych twierdzeń rachunku całkowego uzupełnia wzór Taylora z resztą całkową. Zastosowania całek obejmują wzory definiujące pole, objętość figur geometrycznych i długość łuku; wyprowadzamy wzór Wallisa i wyznaczamy stałą we wzorze Stirlinga oraz wartość całki Poissona (niewłaściwej) – formułujemy także całkowe kryterium zbieżności szeregu. Rozdział kończy przegląd podstawowych metod wyznaczania całek nieoznaczonych.

- Rozdział 11 otwierają definicje $\sigma-$ciał i zbiorów borelowskich (generowanych przez przedziały) oraz miar. Wprowadzenie miary Lebesgue'a – jednoznaczne, bez dowodu istnienia – ustala precyzyjny związek całki Riemanna z polem, czyli miarą zbioru w $\mathbb{R}^2$; z kolei pojęcie miary na prostej $\mathbb{R}$ pozwala na sformułowanie i dowód twierdzenia Lebesgue'a charakteryzującego funkcje całkowalne w sensie Riemanna. Końcowy podrozdział zawiera szczegółowy opis trzech podstawowych metod całkowania numerycznego.

Prezentowany tekst zawiera także minimalny wstęp do analizy numerycznej, w oparciu o dostępne oprogramowanie pozwalające na wykonywanie obliczeń z ustaloną dokładnością. W miarę pojawiania się kolejnych pojęć i wielkości – takich jak $\sqrt{2}, e, \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{n}, \pi, \ln(2), 2^{\sqrt{2}}$ itp. – podawane są metody ich przybliżonego wyznaczania, wraz z oceną dokładności i porównaniem tempa zbieżności dostępnych metod. Wszystkie tego typu zadania zostały zebrane w rozdziale 12.

Życzę przyjemnej, uważnej lektury
Grzegorz Andrzejczak
Łódź – Sokolniki, styczeń 2019