

Spis treści

PRZEDMOWA	7
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	9
1. ELEMENTARNE WIADOMOŚCI O OBWODACH ELEK- TRYCZNYCH	11
1.1. Wprowadzenie	11
1.2. Prawa Kirchhoffa	12
1.3. Proste obwody rezystancyjne	15
1.4. Moc i energia	21
1.5. Kondensator liniowy	22
1.5.1. Wiadomości podstawowe	22
1.5.2. Energia kondensatora	25
1.5.3. Szeregowe i równoległe połączenie kondensatorów	26
1.6. Cewka liniowa	28
1.6.1. Wiadomości podstawowe	28
1.6.2. Energia cewki	30
1.6.3. Szeregowe i równoległe połączenie cewek	31
2. ELEMENTY OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH	35
2.1. Uwagi ogólne	35
2.2. Dwójniki	35
2.2.1. Opornik stacjonarny	36
2.2.2. Cewka stacjonarna	37
2.2.3. Kondensator stacjonarny	39
2.2.4. Dwójniki niestacjonarne	40
2.2.5. Źródła niezależne	41
2.2.6. Źródła sterowane	42
2.2.7. Dwójniki osobliwe	45
2.3. Elementy wielozaciskowe	45
2.4. Cewki magnetycznie sprzężone	56
3. PODSTAWY TOPOLOGII OBWODÓW	61
3.1. Fundamentalne pojęcia topologiczne	61

3.2	Kryteria układania praw Kirchhoffa	64
3.3	Twierdzenie Tellegena	70
4.	LINIOWE OBWODY REZYSTANCYJNE	73
4.1.	Wiadomości podstawowe	73
4.1.1.	Wprowadzenie	73
4.1.2.	Zasada superpozycji	73
4.1.3.	Zastępowanie gałęzi źródłem napięcia lub prądu	77
4.2.	Układy równoważne	78
4.3.	Włączanie i przenoszenie źródeł	82
4.3.1.	Twierdzenie o włączaniu dodatkowych źródeł	82
4.3.2.	Przenoszenie źródeł	83
4.3.3.	Twierdzenie o kompensacji	84
4.4.	Twierdzenie Thevenina-Nortona	87
4.5.	Twierdzenie o wzajemności	95
4.6.	Analiza obwodów metodą napięć węzłowych	99
5.	OBWODY LINIOWE PRĄDU SINUSOIDALNEGO W STANIE USTALONYM	105
5.1.	Wprowadzenie	105
5.2.	Analiza czasowa	110
5.2.1.	Przykłady analizy czasowej	110
5.2.2.	Wartości skuteczne	114
5.3.	Podstawowe zależności metody symbolicznej	115
5.4.	Prawa Kirchhoffa i Ohma dla wartości symbolicznych	118
5.4.1.	Zależności pomocnicze	118
5.4.2.	Prawa Kirchhoffa dla wartości symbolicznych	120
5.4.3.	Prawa Ohma dla wartości symbolicznych	121
5.5.	Impedancja i admitancja	125
5.6.	Moc w obwodach prądu sinusoidalnego	129
5.6.1.	Moc chwilowa, czynna i bierna	129
5.6.2.	Moc elementów R, L, C	133
5.6.3.	Moc symboliczna	136
5.7.	Rzeczywista cewka i kondensator	139
5.7.1.	Cewka rzeczywista	139
5.7.2.	Kondensator rzeczywisty	142
5.8.	Obwody zawierające cewki magnetycznie sprzężone	145
5.8.1.	Szeregowe i równoległe połączenie cewek magne- tycznie sprzężonych	145
5.8.2.	Transformator powietrzny	148
5.9.	Dopasowanie odbiornika do źródła ze względu na moc czynną	150
6.	REZONANS W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH	154
6.1.	Rezonans napięć	154
6.1.1.	Wprowadzenie	154

6.1.2.	Uniwersalna krzywa rezonansowa	158
6.1.3.	Pasma przepuszczania obwodu rezonansowego	161
6.2.	Rezonans prądów	164
6.2.1.	Wprowadzenie	164
6.2.2.	Uniwersalna krzywa rezonansowa	166
6.2.3.	Pasma przepuszczania równoległego obwodu rezonansowego	168
6.3.	Rezonans w obwodzie dwugąłęziowym	169
6.4.	Rezonans w obwodach sprzężonych	172
7.	UKŁADY TRÓJFAZOWE	178
7.1.	Wprowadzenie	178
7.2.	Połączenie gwiazdowe i trójkątowe	181
7.3.	Obliczanie układów trójfazowych	188
7.4.	Moce w układach trójfazowych	194
7.5.	Przykłady analizy układów trójfazowych	197
8.	ANALIZA OBWODÓW LINIOWYCH POBUDZANYCH OKRESOWYMI PRZEBIEGAMI NIESINUSOIDALNYMI	205
8.1.	Wprowadzenie	205
8.2.	Szereg Fouriera	206
8.2.1.	Wiadomości podstawowe	206
8.2.2.	Obliczanie współczynników szeregu Fouriera	209
8.3.	Wykładnicza postać szeregu Fouriera	215
8.4.	Wartości skuteczne i średnie przebiegów odkształconych	218
8.5.	Analiza obwodów liniowych pobudzanych odkształconymi napięciami i prądami źródłowymi	223
8.6.	Wpływ indukcyjności i pojemności na wyższe harmoniczne prądu i napięcia	227
8.7.	Moc okresowych prądów niesinusoidalnych	229
9.	WIADOMOŚCI PODSTAWOWE O OBWODACH NIELINIOWYCH	232
9.1.	Nieliniowe obwody rezystancyjne	232
9.1.1.	Rezystancja statyczna i dynamiczna	232
9.1.2.	Fundamentalne koncepcje nieliniowych obwodów rezystancyjnych	235
9.1.3.	Graficzne wyznaczanie punktu pracy	238
9.1.4.	Graficzne wyznaczanie charakterystyk wejściowych i przejściowych	242
9.2.	Cewka z rdzeniem ferromagnetycznym	249
9.2.1.	Zależności podstawowe	249
9.2.2.	Analiza cewki z uwzględnieniem pętli histerezy	252
9.2.3.	Model cewki z rdzeniem ferromagnetycznym	257
9.3.	Transformator z rdzeniem ferromagnetycznym	261

9.3.1.	Równania i model transformatora	261
9.3.2.	Charakterystyka częstotliwościowa transformatora	268
9.4.	Wzmacniacz operacyjny	271
10.	ANALIZA OBWODÓW LINIOWYCH W STANIE NIEUSTALONYM METODĄ KLASYCZNA	281
10.1.	Wprowadzenie	281
10.2.	Analiza obwodów RC w stanie nieustalonym	283
10.3.	Analiza obwodów RL w stanie nieustalonym	290
10.4.	Stan nieustalony w szeregowym obwodzie RLC	296
10.5.	Stan nieustalony w równoległym obwodzie RLC	305
10.6.	Analiza obwodów odcinkowo-liniowych w stanie nieustalonym	307
11.	RACHUNEK OPERATOROWY I JEGO ZASTOSOWANIE W ANALIZIE OBWODÓW	318
11.1.	Wiadomości podstawowe dotyczące przekształcenia Laplace'a	318
11.2.	Podstawowe twierdzenia przekształcenia Laplace'a	321
11.3.	Przykłady obliczania transformat	329
11.3.1.	Transformata funkcji o postaci impulsu trapezoidalnego	329
11.3.2.	Transformata funkcji okresowej	331
11.4.	Impuls Diraca	335
11.5.	Odwrotne przekształcenie Laplace'a	339
11.6.	Analiza obwodów liniowych metodą rachunku operatorowego	345
11.6.1.	Wiadomości podstawowe	345
11.6.2.	Równania operatorowe	346
11.6.3.	Analiza obwodów metodą operatorową	350
11.7.	Transmitancja operatorowa	354
12.	PASYWNOŚĆ I AKTYWNOŚĆ	358
12.1.	Pasywność i aktywność dwójnika	358
12.1.1.	Pasywność opornika	359
12.1.2.	Pasywność cewki stacjonarnej	361
12.1.3.	Pasywność kondensatora stacjonarnego	361
12.1.4.	Przykłady	362
12.2.	Pasywność i aktywność n -wrotnika	363
12.3.	Wzmocnienie w obwodach pasywnych	365
	LITERATURA	370

Przedmowa

Niniejszy podręcznik zawiera podstawowe i klasyczne wiadomości z teorii obwodów. Jest on przeznaczony dla studentów, którzy opanowali kurs przedmiotów podstawowych I semestru: matematyki, fizyki oraz wstępu do elektrotechniki. Przyjęto w związku z tym, że czytelnik zna teorię liczb zespolonych, rachunek różniczkowy i całkowy oraz jest zapoznany z elementarnymi pojęciami obwodów elektrycznych i magnetycznych. Mimo to w wielu miejscach, a w szczególności w rozdziale 1, dokonano powtórzeń z tego zakresu. Dzięki temu podręcznik może być używany przez studentów o stosunkowo małej wiedzy z zakresu obwodów elektrycznych. Należy jednak podkreślić, że niektóre rozdziały zawierają bardziej zaawansowany materiał, wykładany na III i IV semestrze.

Podręcznik służy jednemu z najważniejszych przedmiotów podstawowych na kierunkach elektrotechnika i elektronika, obejmuje szeroki krąg zagadnień i zawiera dość duży ładunek wiedzy teoretycznej. Przeważająca część przedstawionego materiału ma charakter klasyczny, ale jednocześnie szczegółowo i wszechstronnie starano się naświetlić fundamentalne koncepcje nowoczesnej teorii obwodów.

Wszystkie ważniejsze twierdzenia teorii obwodów podano wraz z dowodami, co pozwala lepiej i głębiej zrozumieć zagadnienia, których one dotyczą oraz zapoznać się z pewnymi schematami myślowymi stosowanymi w tej dziedzinie. Tam, gdzie to było możliwe, starano się zachować ogólność rozważań, obejmując nimi zarówno klasę obwodów liniowych jak i nieliniowych, pasywnych i aktywnych, stacjonarnych i niestacjonarnych. Podręcznik jest ilustrowany licznymi przykładami, zarówno prostymi jak i bardziej skomplikowanymi, stosownie do omawianych zagadnień.

Autor wyraża serdeczne podziękowania obu Recenzentom niniejszego podręcznika prof. dr hab. Kazimierzowi Mikołajukowi i prof. dr hab. Stanisławowi Osowskiemu za uwagi i sugestie, które przyczyniły się do udoskonalenia tekstu.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

B	- susceptancja
b	- liczba gałęzi grafu
C	- pojemność kondensatora
e	- wartość chwilowa napięcia źródłowego
f	- częstotliwość
G	- konduktancja
I	- wartość symboliczna prądu
I_m	- amplituda prądu sinusoidalnego
$I(s)$	- transformata prądu
$ I $	- wartość skuteczna prądu sinusoidalnego
i	- wartość chwilowa prądu
i_s	- prąd swobodny
i_w	- prąd wymuszony
j	- jedność urojona
j	- wartość chwilowa prądu
L	- indukcyjność cewki, dopełnienie drzewa
M	- indukcyjność wzajemna
NPK	- napięciowe prawo Kirchhoffa
P	- moc czynna
P_h	- straty histerezowe
P_w	- straty wiropądowe
PPK	- prądowe prawo Kirchhoffa
p	- moc chwilowa, przekładnia transformatora
Q	- moc bierna
q	- ładunek kondensatora
R	- rezystancja
R_d	- rezystancja dynamiczna
R_{st}	- rezystancja statyczna
S	- moc symboliczna

$ S $	-	moc pozorna
s	-	pulsacja zespolona, współczynnik szczytu
T	-	drzewo grafu, okres, moc zniekształcenia
t	-	czas
U	-	wartość symboliczna napięcia
U_m	-	amplituda napięcia sinusoidalnego
$U(s)$	-	transformata napięcia
$ U $	-	wartość skuteczna napięcia sinusoidalnego
u	-	wartość chwilowa napięcia
u_s	-	napięcie swobodne
u_w	-	napięcie wymuszone
v	-	wartość chwilowa napięcia węzłowego
V	-	wartość symboliczna napięcia węzłowego
WO	-	wzmacniacz operacyjny
$w(t)$	-	energia
X	-	reaktancja
x	-	rozstrojenie bezwzględne
x_a	-	odcięta bezwzględnej zbieżności
x_z	-	odcięta zbieżności
Y	-	admitancja
$ Y $	-	moduł admitancji
Z	-	impedancja
$ Z $	-	moduł impedancji
δ	-	rozstrojenie względne
ρ	-	opór charakterystyczny
σ	-	część rzeczywista pulsacji zespolonej
τ	-	czas, stała czasowa
ϕ	-	strumień magnetyczny
φ	-	kąt przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem i prądem
φ_i	-	faza początkowa prądu
φ_u	-	faza początkowa napięcia
Ψ	-	strumień magnetyczny skojarzony
ω	-	pulsacja, część urojona pulsacji zespolonej
ω_r	-	pulsacja rezonansowa
\mathcal{L}	-	transformacja Laplace'a
\mathcal{L}^{-1}	-	odwrotna transformacja Laplace'a
$1(t)$	-	funkcja jednostkowa

1. Elementarne wiadomości o obwodach elektrycznych

1.1. Wprowadzenie

Teoria obwodów jest podstawowym działem elektrotechniki i elektroniki i zajmuje się badaniem elementów elektrycznych oraz ich połączeń. Elementy obwodów mają wyprowadzone na zewnątrz dwie lub więcej końcówek, za pomocą których tworzy się ich połączenia. Używa się do tego celu przewodów, o których na ogół zakładamy, że są idealnie przewodzące. Przykładami elementów obwodów są opornik, kondensator, cewka, tranzystor, wzmacniacz operacyjny, źródła napięcia i prądu.

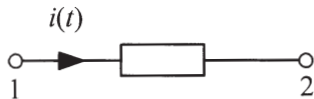
W niniejszym rozdziale będziemy rozpatrywać elementarne obwody utworzone z najbardziej podstawowych elementów-oporników, kondensatorów i cewek-zasilane ze źródeł napięcia. Większość podanych tu praw, zależności i definicji ujęto w sposób poglądowy. W dalszym ciągu zostaną one uogólnione i rozszerzone z zachowaniem pełnej precyzji.

Graficznym obrazem obwodu jest jego schemat pokazujący połączenie elementów reprezentowanych za pomocą odpowiednich symboli. Elementy 2-końcówkowe wyznaczają gałęzie obwodu, zaś punkty, w których łączą się dwie lub więcej gałęzie nazywamy węzłami i zaznaczamy za pomocą kropki.

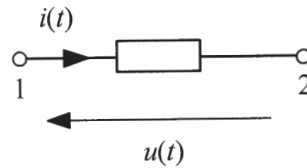
W obwodach elektrycznych rozpatruje się napięcia pomiędzy węzłami oraz prądy płynące w gałęziach. Na ogół zarówno napięcia, jak i prądy zmieniają się w czasie, a ich kształty mogą być różnorodne. Z tego powodu ogólnie nie jest możliwe określenie rzeczywistego kierunku przepływu prądu oraz biegunowości napięcia. Konieczne jest więc przyjęcie pewnych kierunków odniesienia. Dla każdego prądu przyjmuje się kierunek odniesienia zaznaczony za pomocą strzałki, jak to pokazano na rys. 1.1.1, przedstawiający dowolny element dwukońcówkowy, oznaczony za pomocą prostokąta.

Jeżeli w chwili t_1 prąd wynosi $0,5A$, czyli $i(t_1) = 0,5A$, to oznacza, że w rozpatrywanej chwili prąd równy $0,5A$ płynie zgodnie ze strzałką, czyli wpływa do elementu poprzez zacisk 1 i opuszcza element poprzez zacisk 2. Jeżeli w innej

chwili t_2 prąd wynosi $-1,2\text{A}$, czyli $i(t_2) = -1,2\text{A}$, to oznacza, że w rozpatrywanej chwili prąd płynie w kierunku przeciwnym do wskazanego przez strzałkę, czyli wpływa do elementu poprzez zacisk 2. Stąd wynika, że znajomość znaku i wartości prądu w danej chwili oraz kierunku odniesienia umożliwia jednoznaczne określenie rzeczywistego prądu w tej chwili.



Rys. 1.1.1. Element 2-końcówkowy z zaznaczonym kierunkiem odniesienia prądu



Rys. 1.1.2. Element 2-końcówkowy z zaznaczonymi kierunkami odniesienia prądu i napięcia

Na rysunku 1.1.2 zaznaczono ponadto kierunek odniesienia napięcia $u(t)$ za pomocą strzałki pomiędzy zaciskami 1 i 2. Jeżeli w pewnej chwili t_1 napięcie wynosi 12V , czyli $u(t_1) = 12\text{V}$, to oznacza, że w rozpatrywanej chwili potencjał elektryczny zacisku 1 jest o 12V większy niż potencjał zacisku 2. Jeżeli w innej chwili t_2 napięcie wynosi -6V , czyli $u(t_2) = -6\text{V}$, to oznacza, że w chwili t_2 potencjał zacisku 1 jest o 6V mniejszy od potencjału zacisku 2. Napięcie $u(t)$ wzdłuż elementu nosi nazwę napięcia gałęziowego.

Często, w celu uproszczenia zapisu, będziemy opuszczać literę t , oznaczając napięcie przez u zamiast $u(t)$. Podobna zasada będzie stosowana w stosunku do prądu.

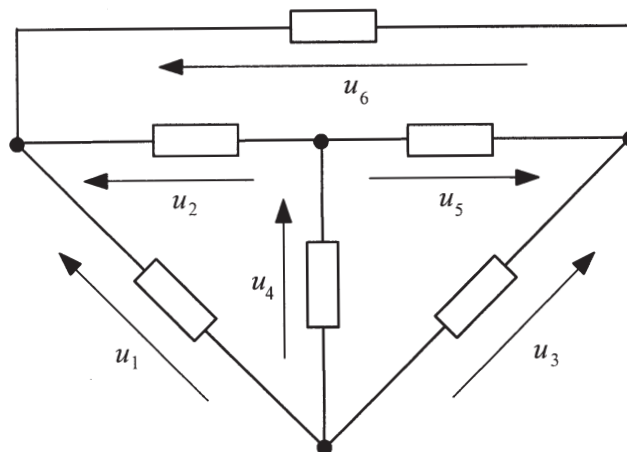
Jeżeli kierunki odniesienia prądu oraz napięcia gałęziowego są takie jak pokazano na rys. 1.1.2, czyli strzałki prądu i napięcia mają przeciwne zwroty, to mówimy, że prąd i napięcie mają stowarzyszone kierunki odniesienia. Taką konwencję będziemy przyjmowali w całym kursie teorii obwodów. W przyszłości będziemy ponadto zastępować zwrot *kierunek odniesienia prądu lub napięcia* zwrotem uproszczonym: *kierunek prądu lub napięcia*.

1.2. Prawa Kirchhoffa

Prawa Kirchhoffa należą do najbardziej ogólnych i fundamentalnych zasad obowiązujących w obwodach elektrycznych. Rozróżniamy napięciowe prawo Kirchhoffa (w skrócie NPK) oraz prądowe prawo Kirchhoffa (w skrócie PPK).

Aby sformułować NPK należy wprowadzić pojęcie pętli. Jest to pojęcie topologiczne, które zostanie precyzyjnie zdefiniowane w rozdziale 3. Chwilowo

przyjmimy, że jest to zbiór elementów zaczynających się w jednym węźle, obejmujący kolejne połączone ze sobą gałęzie i kończący się w tym samym węźle. Przykładowo w obwodzie z rys. 1.2.1 pętle tworzą gałęzie o numerach 1,2,4 oraz 2,6,3,4.



Rys. 1.2.1. Obwód przykładowy służący do ilustracji NPK

Napięciowe prawo Kirchhoffa formułujemy w danej pętli, przyjmując dowolnie kierunek obiegu w tej pętli. Kierunek obiegu może być zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Napięciowe prawo Kirchhoffa (NPK)

Rozpatrujemy dowolny obwód elektryczny i wyodrębniamy w tym obwodzie dowolną pętlę. W każdej chwili t suma algebraiczna napięć gałęziowych w rozpatrywanej pętli równa się zero. Składniki sumy algebraicznej piszemy ze znakiem plus, jeżeli kierunki napięć gałęziowych są zgodne z kierunkiem obiegu i ze znakiem minus w przypadku przeciwnym.

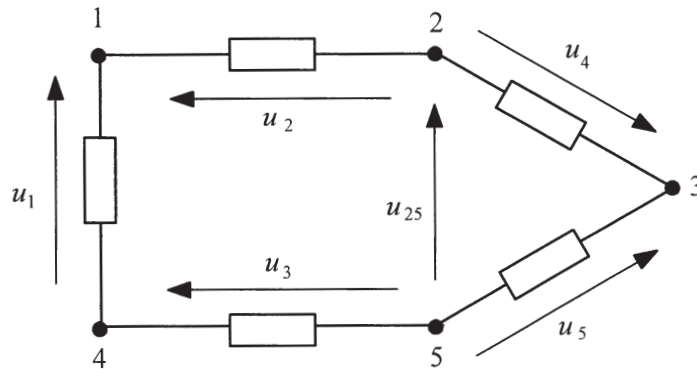
W celu zilustrowania NPK rozpatrujemy obwód z rys. 1.2.1 i wybieramy pętlę utworzoną z gałęzi 1,2,4. Przyjmując kierunek obiegu pętli zgodny z ruchem wskazówek zegara, otrzymujemy następujące równanie wynikające z NPK:

$$u_1 - u_2 - u_4 = 0.$$

Dla pętli utworzonej z gałęzi 4,2,6,3, w której przyjmujemy kierunek obiegu przeciwny do ruchu wskazówek zegara, równanie NPK jest następujące:

$$u_3 + u_6 - u_2 - u_4 = 0.$$

Sformułowane wyżej napięciowe prawo Kirchhoffa zostało wyrażone w kategoriach napięć gałęziowych. Bardziej ogólną wersję tego prawa otrzymujemy rozpatrując tzw. zamknięty ciąg węzłów, czyli zbiór węzłów zaczynający się i kończący w tym samym węźle. Przykładowo, w obwodzie pokazanym na rys. 1.2.2 węzły 1,2,5,4,1 tworzą zamknięty ciąg węzłów.



Rys. 1.2.2. Obwód przykładowy służący do ilustracji NPK

Korzystając z pojęcia zamkniętego ciągu węzłów możemy wyrazić NPK w poniższy sposób.

W dowolnym obwodzie, dla każdego zamkniętego ciągu węzłów w dowolnej chwili, suma algebraiczna napięć występujących pomiędzy węzłami tworzącymi ciąg zamknięty, jest równa zero. Zauważmy, że kierunek obiegu jest obecnie wymuszony przez przyjęty ciąg węzłów i ustalając znak napięć w wyznaczonej wyżej sumie algebraicznej, porównujemy kierunki napięć z kierunkiem obiegu podobnie, jak w poprzedniej wersji NPK. Przyjmując przykładowo w obwodzie z rys. 1.2.2 zamknięty ciąg węzłów 1,2,5,4,1, otrzymujemy równanie wynikające z NPK:

$$-u_2 - u_{25} + u_3 + u_1 = 0.$$

Prądowe prawo Kirchhoffa (PPK)

Dla każdego obwodu i dowolnego jego węzła, w każdej chwili, suma algebraiczna prądów w gałęziach zbiegających się w tym węźle jest równa zero.

W wyznaczonej wyżej sumie algebraicznej przypisujemy prądowi znak plus, jeżeli jego kierunek jest od węzła i znak minus w przypadku, gdy strzałka prądu

jest skierowana do węzła. Powyższą zasadę będziemy stosować konsekwentnie w całym kursie teorii obwodów mimo, że dopuszczalne jest również przyjęcie przeciwnej reguły.

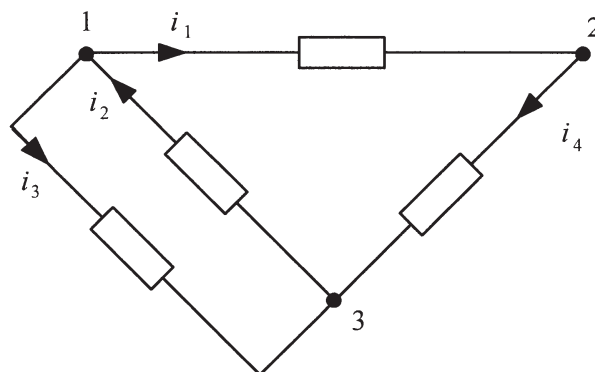
W celu zilustrowania prądowego prawa Kirchhoffa rozpatrzmy obwód z rys. 1.2.3 i zastosujemy PPK do węzła 1

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0.$$

Podobnie dla węzła 3 otrzymujemy

$$i_2 - i_3 - i_4 = 0.$$

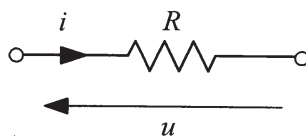
Należy podkreślić, że prawa Kirchhoffa dotyczą struktury geometrycznej obwodu, czyli jego topologii i nie zależą od rodzaju elementów umieszczonych w poszczególnych gałęziach. Zagadnienia dotyczące praw Kirchhoffa będą rozszerzone i uogólnione w rozdziale 3.



Rys. 1.2.3. Obwód przykładowy służący do ilustracji PPK

1.3. Proste obwody rezystancyjne

Najprostszym elementem obwodów elektrycznych jest opornik liniowy. Symbol opornika jest pokazany na rys. 1.3.1.



Rys. 1.3.1. Opornik liniowy

Zgodnie z prawem Ohma napięcie wzdłuż opornika jest proporcjonalne do prądu płynącego w oporniku, czyli

$$u = Ri, \quad (1.3.1)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności oznaczony przez R nosi nazwę oporu i jest wyrażony w omach

$$1\Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}.$$

Zależność (1.3.1) można zapisać w postaci równoważnej

$$i = Gu, \quad (1.3.2)$$

gdzie $G = R^{-1}$ jest przewodnością, a jej jednostką jest simens

$$1\text{S} = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}.$$

Pokazany na rys. 1.3.2 obwód stanowi połączenie szeregowe dwóch oporników R_1 i R_2 . W obu opornikach płynie ten sam prąd, wobec czego stosując NPK oraz prawo Ohma otrzymujemy:

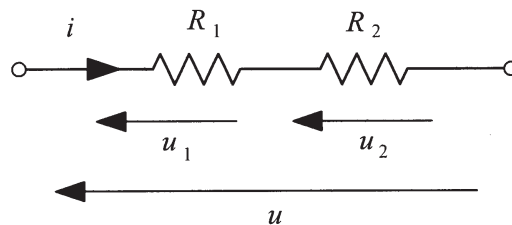
$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i.$$

Stąd wynika zależność

$$\frac{u}{i} = R_1 + R_2, \quad (1.3.3)$$

co oznacza, że połączenie szeregowe oporników R_1 i R_2 można zastąpić opornikiem równoważnym o oporze

$$R = R_1 + R_2. \quad (1.3.4)$$



Rys. 1.3.2. Szeregowe połączenie dwóch oporników

Tak więc opór szeregowego połączenia jest większy od oporu każdego z oporników tworzących to połączenie. Napięcie występujące na zaciskach omawianego połączenia jest sumą napięć u_1 oraz u_2 określonych wzorami:

$$u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u, \quad u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u,$$

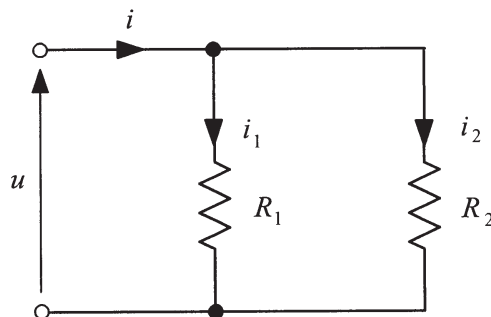
gdzie skorzystano z zależności (1.3.3). Z tego powodu połączenie szeregowe oporników R_1 i R_2 można uważać za dzielnik napięcia, w którym napięcie u ulega podziałowi na napięcia u_1 oraz u_2 takie, że

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Wzór (1.3.4) natychmiast uogólnia się na przypadek szeregowego połączenia n oporników R_1, R_2, \dots, R_n :

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (1.3.5)$$

Rysunek 1.3.3 przedstawia równoległe połączenie dwóch oporników R_1 oraz R_2 .



Rys. 1.3.3. Równoległe połączenie dwóch oporników

Napięcie na obu opornikach jest jednakowe i równe napięciu u , natomiast prąd i , zgodnie z PPK, spełnia równanie

$$i = i_1 + i_2.$$

Ponieważ, w myśl prawa Ohma, zachodzi

$$i_1 = \frac{u}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u}{R_2},$$

więc wynika stąd zależność

$$i = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u.$$

A zatem

$$\frac{i}{u} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

gdzie lewa strona równania oznacza przewodność $G = R^{-1}$ opornika, który jest równoważny rozpatrywanemu połączeniu. Tak więc

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1.3.6)$$

lub

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.3.7)$$

Zależność (1.3.6) pokazuje, że rezystancja równoległego połączenia jest mniejsza od rezystancji każdego opornika tworzącego to połączenie. Korzystając z zależności

$$u = Ri = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$

obliczamy prądy i_1 oraz i_2 stosując prawo Ohma:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \quad i_2 = \frac{u}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i. \quad (1.3.8)$$

Stwierdzamy więc, że w rozpatrywanym połączeniu prąd i rozdziela się na prądy i_1 oraz i_2 zgodnie ze wzorami (1.3.8), które prowadzą do relacji

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Wobec tego połączenie równoległe dwóch oporników można uważać za dzielnik prądu.

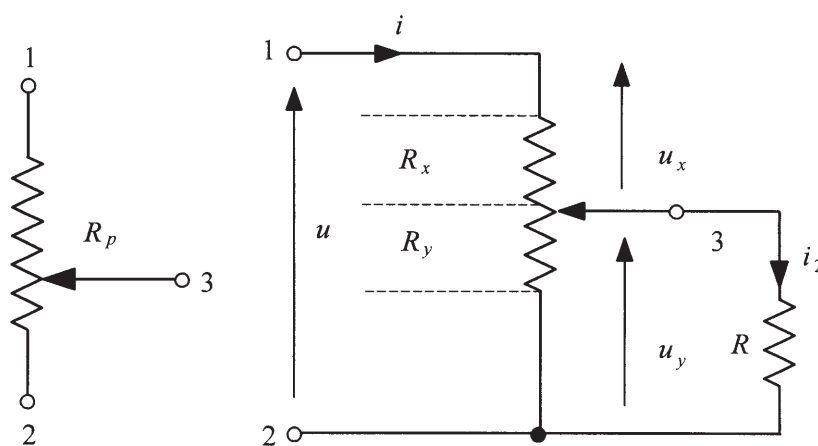
Wzór (1.3.6) natychmiast uogólnia się na przypadek n oporników R_1, R_2, \dots, R_n połączonych równoległe:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (1.3.9)$$

Opornik 3-końcówkowy, pokazany na rys. 1.3.4, nosi nazwę potencjometru. Zacisk 3 jest ruchomy i może przyjmować dowolne położenie ślizgając się wzdłuż opornika R_p .

Rysunek 1.3.5 przedstawia potencjometr R_p zasilany napięciem u z dołączonym do zacisków 3 i 2 dodatkowym opornikiem R . Przypuśćmy, że suwak potencjometru jest ustawiony w położeniu dzielącym opór R_p na R_x oraz R_y , gdzie

$$R_p = R_x + R_y.$$



Rys. 1.3.4. Potencjometr

Rys. 1.3.5. Obwód złożony z potencjometru i opornika R

W tej sytuacji rozpatrywany obwód można traktować jako szeregowe połączenie opornika R_x oraz połączenia równoległego oporników R_y oraz R . A zatem opór widziany z zacisków 1, 2 jest określony wzorem

$$R = R_x + \frac{R_y R}{R_y + R}.$$

Wobec tego prąd i wynosi

$$i = \frac{u}{R_x + \frac{R_y R}{R_y + R}},$$

natomiast napięcie u_y określa wzór

$$u_y = \frac{R_y R}{R_y + R} i = \frac{R_y R}{R_y + R} \frac{u}{R_x + \frac{R_y R}{R_y + R}},$$

a zatem

$$u_y = \frac{R_y R}{R_x (R_y + R) + R_y R} u. \quad (1.3.10)$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy suwak znajduje się w górnym krańcowym położeniu, wówczas $R_x = 0$ oraz $u_y = u$. W dolnym krańcowym położeniu suwaka $R_y = 0$ oraz $u_y = 0$. Tak więc przesuwając suwak od dołu do góry zwiększamy napięcie u_y od 0 do u . Jeżeli suwak zajmie środkowe położenie, czyli takie, że $R_x = R_y$, to napięcie u_y będzie mniejsze od $\frac{1}{2}u$, bowiem opór połączenia równoległego R_y oraz R jest mniejszy od oporu $R_x = R_y$. Aby zrealizować równość

$$u_y = \frac{1}{2}u$$

należy ustawić suwak w takim położeniu, żeby

$$R_x = \frac{R_y R}{R_y + R}.$$

Ponieważ $R_y = R_p - R_x$, więc wynika stąd relacja

$$R_x = \frac{(R_p - R_x)R}{R_p - R_x + R},$$

lub po elementarnych przekształceniach

$$R_x^2 - (R_p + 2R)R_x + R_p R = 0. \quad (1.3.11)$$

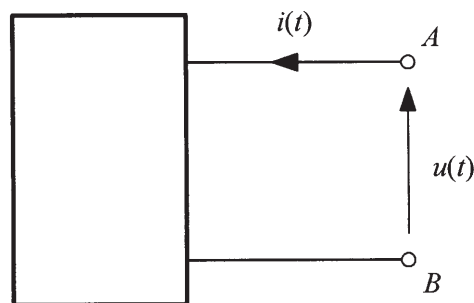
Powyższe równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste dodatnie, z których wybieramy następujący:

$$R_x = \frac{R_p + 2R - \sqrt{(R_p + 2R)^2 - 4R_p R}}{2} = \frac{1}{2}R_p + R - \frac{1}{2}\sqrt{R_p^2 + 4R^2}.$$

Drugi pierwiastek jest większy od R_p i wobec tego nie może być zrealizowany.

1.4. Moc i energia

W niniejszym rozdziale będziemy rozpatrywali obwody 2-końcówkowe, zwane dwójnikami. Dwójnikiem może być pojedynczy element 2-końcówkowy lub połączenie elementów, z których wyprowadzono na zewnątrz dwie końcówki (rys. 1.4.1).



Rys. 1.4.1. Dwójnik AB

Rozpatrzmy dwójnik pokazany na rys. 1.4.1 zasilany z generatora o napięciu $u(t)$ i oznaczmy prąd tego dwójnika przez $i(t)$. Jak wiadomo z fizyki, moc chwilowa dwójnika jest iloczynem napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (1.4.1)$$

Jeżeli napięcie $u(t)$ jest wyrażone w woltach, a prąd $i(t)$ w amperach, to moc chwilowa jest określona w watach

$$1\text{W} = 1\text{VA}.$$

Energia dostarczona z generatora do dwójnika w czasie od t_0 do t wynosi

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t u(\tau) i(\tau) d\tau, \quad (1.4.2)$$

gdzie czas będący zmienną całkową oznaczono literą τ , w celu odróżnienia od chwili t występującej w górnej granicy całkowania.

Jeżeli moc chwilowa $p(t)$ jest wyrażona w watach, to energia $w(t_0, t)$ jest określona w dżulach

$$1\text{J} = 1\text{Ws}.$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy dwójnik AB jest opornikiem o oporze R , wówczas zachodzi:

$$u(t) = Ri(t), \quad i(t) = \frac{1}{R} u(t),$$

a zatem

$$p(t) = u(t)i(t) = R(i(t))^2 = \frac{1}{R}(u(t))^2. \quad (1.4.3)$$

Na podstawie wzoru (1.4.3) stwierdzamy, że moc opornika liniowego jest w każdej chwili t nieujemna.

1.5. Kondensator liniowy

1.5.1. Wiadomości podstawowe

Kondensator należy do najbardziej rozpowszechnionych elementów obwodów elektrycznych. Jego cechą charakterystyczną jest gromadzenie ładunku elektrycznego. Ładunek $q(t)$ kondensatora liniowego jest proporcjonalny do napięcia $u(t)$ na zaciskach kondensatora

$$q(t) = Cu(t), \quad (1.5.1)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności C nosi nazwę pojemności kondensatora. Jednostką pojemności jest farad (w skrócie F), przy czym

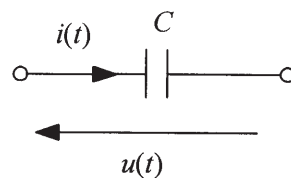
$$1F = 1 \frac{C}{V} .$$

Prąd $i(t)$ płynący przez kondensator (rys.1.5.1) jest równy pochodnej ładunku względem czasu

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} .$$

Uwzględniając zależność (1.5.1) otrzymujemy

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} . \quad (1.5.2)$$



Rys. 1.5.1. Kondensator liniowy

Wzór (1.5.2) wyraża prąd płynący przez kondensator w zależności od napięcia na jego zaciskach. W celu uzależnienia napięcia od prądu zastępujemy t przez τ i całkujemy obie strony równania (1.5.2) w granicach od 0 do t

$$\int_0^t i(\tau) d\tau = C \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_{u(0)}^{u(t)} du = C(u(t) - u(0)) .$$

Stąd wynika poszukiwana relacja

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau , \quad (1.5.3)$$

gdzie $u(0)$ jest napięciem początkowym kondensatora występującym w chwili $t=0$. Zależność (1.5.3) wskazuje, że napięcie na kondensatorze w chwili t zależy od napięcia początkowego $u(0)$ oraz od przebiegu prądu w przedziale czasu $0-t$. Z tego powodu mówimy, że kondensator pamięta przeszłość.

Przykład 1.1

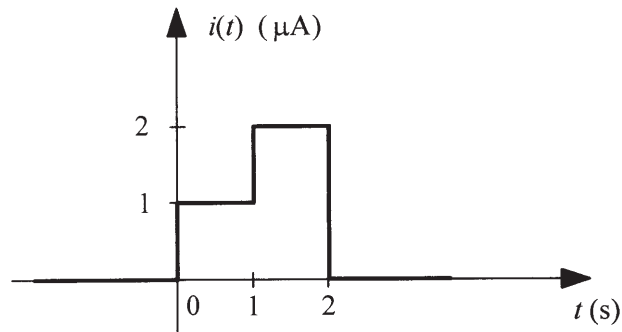
Rozpatrzmy kondensator o pojemności $C = 1\mu F = 10^{-6} F$ i napięciu początkowym $u(0) = -1V$, którego prąd $i(t)$ ma kształt przedstawiony na rys. 1.5.2. W

celu obliczenia napięcia $u(t)$ kondensatora korzystamy z zależności (1.5.3). Ze względu na kształt prądu wyodrębniamy trzy przedziały czasu:

$$0 \leq t \leq 1: \quad u(t) = -1 + \frac{1}{10^{-6}} \int_0^t 10^{-6} d\tau = -1 + t,$$

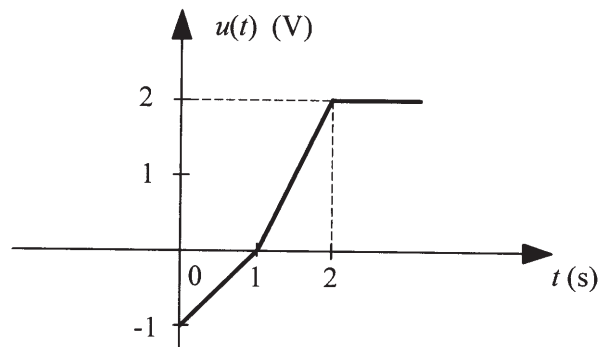
$$1 \leq t \leq 2: \quad u(t) = -1 + \frac{1}{10^{-6}} \int_0^1 10^{-6} d\tau + \frac{1}{10^{-6}} \int_1^t 2 \cdot 10^{-6} d\tau = 2(t - 1),$$

$$t > 2: \quad u(t) = u(2) = 2.$$



Rys. 1.5.2. Kształt prądu $i(t)$

Wynik dla $t > 2$ jest konsekwencją faktu, że prąd $i(t)$ jest wówczas równy zero, wobec czego kondensator nie może ulec rozładowaniu. Jego ładunek nie ulega zmianie, a co za tym idzie również napięcie pozostaje stałe (patrz (1.5.1)). Na rysunku 1.5.3 pokazano przebieg napięcia kondensatora w funkcji czasu.



Rys. 1.5.3. Napięcie kondensatora rozpatrywanego w przykładzie