Spis treści

Przedmowa

Postęp cywilizacyjny stał się przyczynkiem do rozwoju nauk interdyscyplinarnych. Na tym gruncie rozwinęła się *mechatronika* – nowoczesna dziedzina nauki, obejmująca doskonale opanowaną mechanikę, nowszą elektronikę oraz równolegle formowaną wiedzę z zakresu symulacji numerycznych, sterowania i optymalizacji. Te ostatnie stawiają mechanikę układów dynamicznych i elektronikę w całkiem nowej roli. Są one podstawą projektów mechatronicznych o znaczeniu eksperymentalnym – poznawczym i praktycznym – aplikacyjnym. Z tego względu, inżynier mechatronik, automatyk lub elektronik powinien czerpać wiedzę użyteczną i nabywać takie umiejętności, które pozwolą mu sprostać wyzwaniom technicznym na miarę XXI wieku.

Przyszły inżynier-naukowiec to coraz częściej student nauk technicznych. Wiedza techniczna oraz przekonanie o potrzebie jej wykorzystania zyskuje na znaczeniu, ponieważ wiąże się z rozwojem cywilizacyjnym. Wymierne korzyści obejmują wytwarzanie dóbr materialnych, poprawiających jakość życia ludzi, składowanie i transport towarów, komunikację i telekomunikację, automatyzację procesów technologicznych, produkcję i dostawy energii, wydobycie surowców, opanowanie środowiska naturalnego, unowocześnienie struktur wojskowych, loty w przestrzeń kosmiczną i wiele innych.

Wynika z tego, że programy kształcenia studentów na kierunkach technicznych muszą być na bieżąco dostosowywane do pędzącego postępu cywilizacyjnego. Zagadnienia o charakterze teoretycznym i doświadczalnym podejmowane w tej monografii wychodzą temu naprzeciw.

W siedmiu rozdziałach omówiono urządzenia i systemy mechatroniczne stosowane w technice, przeprowadzono symulacje numeryczne ich działania oraz rozpatrzono szereg problemów optymalizacyjnych, zmierzających do poprawy ich właściwości. Modele matematyczne i numeryczne systemów prezentowanych w tej monografii zyskują na znaczeniu i powinny stanowić dla młodego inżyniera ciekawe źródło informacji o układach dynamicznych, eksperymentach numerycznych, pomiarach doświadczalnych oraz zagadnieniach optymalizacyjnych w mechatronice.

Monografia jest efektem pracy autorów oraz studentów kierunku Mechatronika na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej. Swój wkład w część doświadczalną mają studenci Adam Białkowski, Konrad Gadzinowski i Wojciech Kunikowski, do których autorzy kierują swoje podziękowania.

Mamy nadzieję, że to wydanie będzie chętnie wybierane jako źródło eksperymentów numerycznych, a zamieszczone modele układów mechatronicznych często praktykowane podczas pracy własnej i zajęć laboratoryjnych.

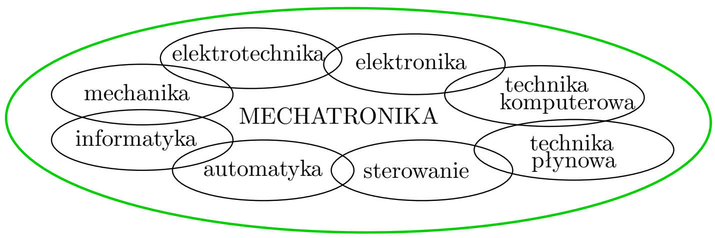
Autorzy

1. Wstęp

1.1. Mechatronika

Twórcy programów nauczania na wyższych uczelniach technicznych wiedzieli od dawna, że dobry konstruktor, oprócz przygotowania kierunkowego, powinien mieć przygotowanie interdyscyplinarne. Na wydziałach mechanicznych politechnik, oprócz nauczania mechaniki, wytrzymałości materiałów, podstaw konstrukcji i technologii mechanicznej prowadzono zajęcia z zakresu elektrotechniki, elektroniki, automatyki, hydrauliki i pneumatyki, informatyki, przyrządów pomiarowych, architektury maszyn i innych. Inżynier wykształcony według takiego programu nauczania posiada wszechstronną wiedzę i może wybrać odpowiednie rozwiązanie, korzystając bezpośrednio z poznanych technik lub wiedzy znanych mu ekspertów.

W Japonii w roku 1969 wymyślono, a latach 70. rozpowszechniono pojęcie na określenie synergicznego wykorzystania wiedzy z podstawowych działów techniki dla uzyskania współcześnie aktualnego terminu o nazwie **mechatronika** (z ang. *mechatronics*). Słowo mechatronika wynika z połączenia słów mechanika i elektronika. Literatura [6, 21, 48] podaje wiele definicji i opisów znaczenia oraz grafik dotyczących pojęcia mechatronika. Na rysunku 1.1 przedstawiono jeden ze schematów zamieszczony w pracy [6], pokazujący powiązania współczesnych dziedzin techniki w mechatronice.



Rys. 1.1. Powiązania dyscyplin naukowych w mechatronice

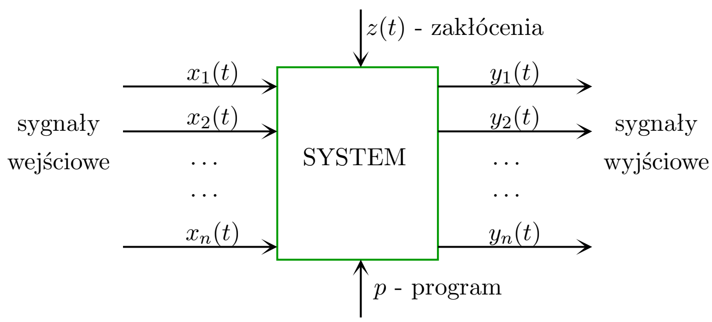
Jednym z największych wyzwań rozwoju urządzeń i systemów mechatronicznych jest, obok ich rozmaitości, postępująca złożoność oraz uniwersalność [16, 19, 49, 78]. Postęp cywilizacyjny wymusza zatem na badaczach i inżynierach konieczność sięgania po dotychczas niewspółistniejące rozwiązania z zakresu różnych dziedzin nauki i techniki [3, 8, 14, 25, 27, 38]. Zauważalny brak wystarczająco dobrze opracowanych metod analizy dynamicznej, wspierających aspekty interdyscyplinarne procesów rozwoju urządzeń i systemów mechatronicznych potęguje chęć wykorzystania optymalizacji oraz różnych technik modelowania numerycznego. Symulacja numeryczna oraz powiązane z nią przetwarzanie sygnałów pomiarowych silnie wiążą się z rozwiniętymi metodami optymalizacyjnymi. W tym kontekście, podejmowane w tej monografii modele urządzeń zyskują na znaczeniu i powinny stanowić dla inżynierów ciekawe źródło informacji o modelowaniu matematycznym układów dynamicznych, eksperymentach numerycznych, pomiarach doświadczalnych oraz zagadnieniach optymalizacyjnych w mechatronice.

1.2. Systemy

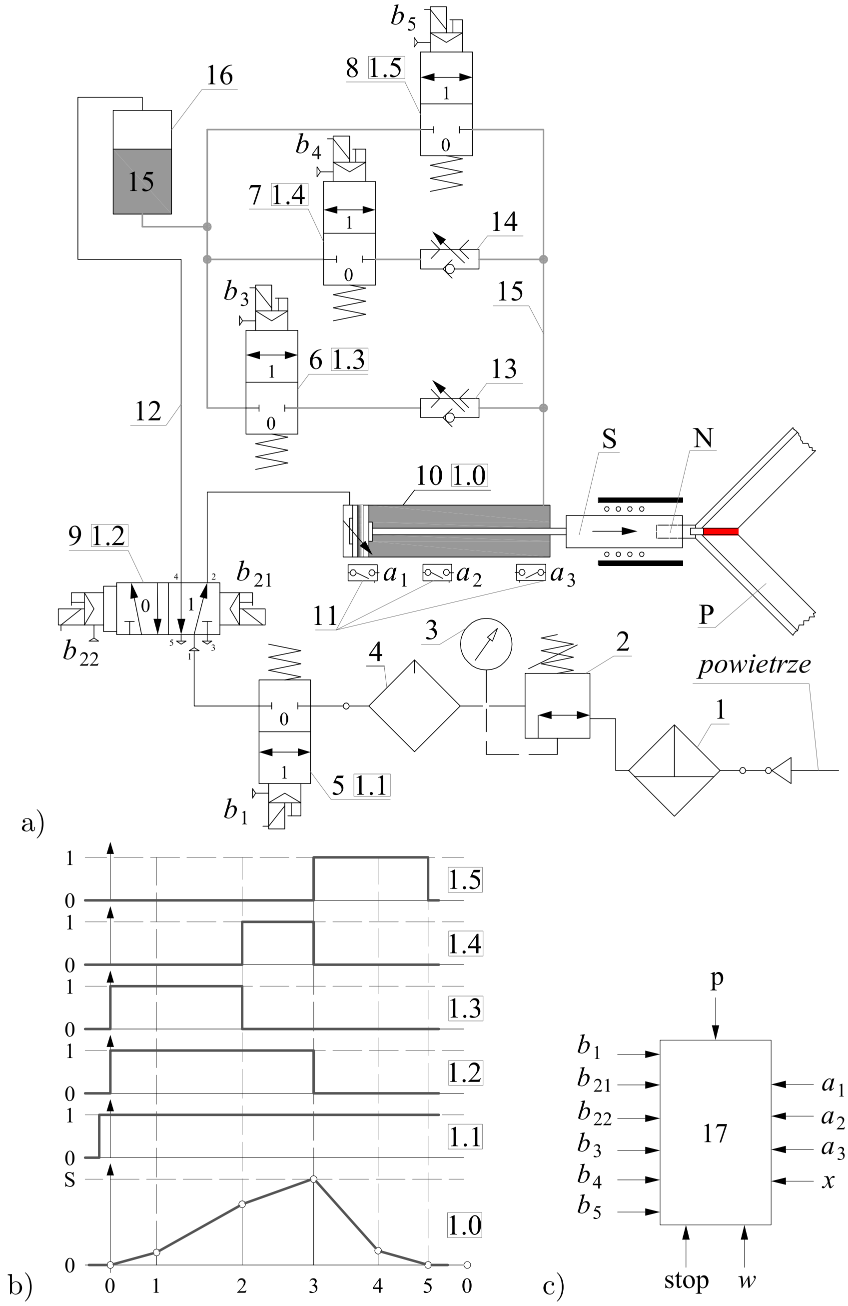
System (z gr. *systema* – rzecz złożona) – obiekt fizyczny lub abstrakcyjny, w którym można wyróżnić wzajemne powiązania. Według jednego z kryteriów [84], systemy można podzielić na: abstrakcyjne i fizyczne, statyczne i dynamiczne, otwarte i zamknięte, autonomiczne.

System – zespół wzajemnie sprzężonych elementów, spełniający określoną funkcję i traktowany jako wyodrębniony z otoczenia w określonym celu, tj. opisowym, badawczym lub innym. Przykładowo, systemem jest proces technologiczny. Pojęcie *system* jest stosowane praktycznie we wszystkich dziedzinach i odnosi się zarówno do zjawisk, obiektów i procesów występujących w naturze jak również do tych stworzonych przez ludzi.

Oto kilka przykładów systemów: społeczny, polityczny, nerwowy, liczbowy, metryczny, słoneczny, radionawigacyjny, komputerowy. W cybernetyce i badaniach systemowych przyjmuje się, że otoczenie wpływa na system za pośrednictwem sygnałów wejściowych, które mogą mieć charakter oddziaływań celowych (sterowanie, decyzje) lub zakłóceń przeszkadzających w realizacji celu działania systemu. Istotną cechą systemów rzeczywistych są ich własności dynamiczne. Powodują one, że system może znajdować się w równowadze – w stanie ustalonym bądź też w stanie nieustalonym, który dąży do równowagi. Jeżeli właściwości dynamiczne nie są istotne, to system traktuje się jako statyczny [95]. Blokowy schemat systemu zbudowany w oparciu o podaną definicję przedstawiono na rysunku 1.2.



Rys. 1.2. Blokowy schemat funkcjonowania systemu



Rys. 1.3. System pneumo-hydraulicznego sterowania napędem siłownika strugarki-oczyszczarki naroży okien PCV: a) schemat pneumo-hydro-mechaniczny, b) diagram pracy, c) sterownik [59]

System pneumo-hydrauliczny z rysunku 1.3 składa się z następujących komponentów: 1 – filtr, 2 – zawór redukcyjny, 3 – manometr, 4 – naolejacz, 5-8 – rozdzielacze monostabilne 2/2, 9 – rozdzielacz bistabilny 5/2, 10 – siłownik pneumo-hydrauliczny z obustronnym tłumieniem, 11 – kontaktronowe czujniki położenia, 12 – przewody powietrzne, 13, 14 – zawory dławiąco-zwrotne, 15 – przewody olejowe, 16 – pneumo-hydrauliczny przekaźnik ciśnienia, 17 – sterownik PLC, a – sygnały wejściowe, b – sygnały wyjściowe, x – sygnał uruchamiający cykl, w – włączenie lub wyłączenie zasilania, stop – wyłączenie awaryjne.

1.3. Jednostki miary

Wielkość fizyczną $\mathbf{A}$ określa wartość $\{\mathbf{A}\}$ i jednostka miary $[\mathbf{A}]$:

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{A}\}[\mathbf{A}], \quad \text{np.} \quad v = 30\,[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}],\ \rho = 1.29\,[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}]\,. \tag{1.1}$$

Jednostka miary to określona miara danej wielkości fizycznej służąca jako wzorzec do ilościowego oznaczania innych miar metodą porównania tych miar za pomocą liczb. Umownie, wartość liczbowa miary wzorcowej jest równa jedności, stąd:

$$[\mathbf{A}] = \frac{\mathbf{A}}{\{\mathbf{A}\}}, \quad \text{np.} \quad [\mathbf{A}] = \frac{45[\mathrm{m}]}{45} = 1\,[\mathrm{m}]. \tag{1.2}$$

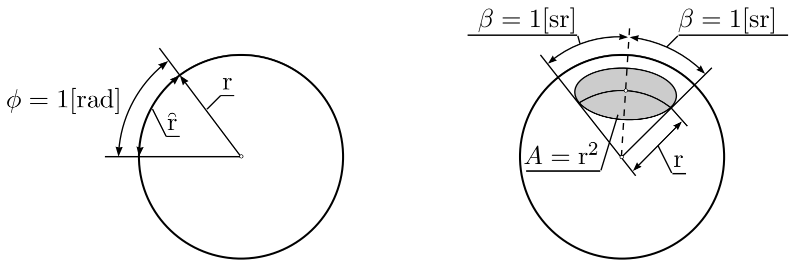
W metrycznym układzie miar **SI** jest siedem ściśle zdefiniowanych jednostek podstawowych i dwie jednostki uzupełniające.

Do **jednostek podstawowych** zalicza się:

1) *metr* [m] – j. długości, 2) *amper* [A] – j. natężenia prądu,
3) *kilogram* [kg] – j. masy, 4) *kelwin* [K] – j. temp. termodyn.,
5) *sekunda* [s] – j. czasu, 6) *kandela* [Cd] – j. światłości,
7) *mol* [mol] – j. ilości substancji;

jednostki uzupełniające to:

8) *radian* [rad] – j. kąta płaskiego, 9) *steradian* [sr] – j. kąta bryłowego.



Rys. 1.4. Graficzna interpretacja radiana ϕ i steradiana β

Obecnie stosowany, międzynarodowy układ jednostek miar SI przyjęto w 1960 roku na IX Generalnej Konferencji Miar i Wag w Genewie. W Polsce obowiązuje on od 1967 r. W mechanice używamy *trzy jednostki podstawowe*, tworzące układ MKS, są to: [m], [kg], [s]. Układ miar MKS jest określany jako *bezwzględny praktyczny układ jednostek*. Opisany wyżej zestaw jednostek należy do systemu LMT, którego nazwa pochodzi od trzech wielkości, tj. długości, masy i czasu (z ang. *length, mass, time*). Do systemu LMT należy również wcześniejszy, używany w fizyce *bezwzględny układ jednostek* CGS, na który składają się: [cm], [g], [s]. Z podstawowych jednostek są tworzone systemy o różnych konfiguracjach, np. 4-składnikowy LMTI lub 6-składnikowy LMTIΘJ, w którym wyróżnia się: długość, masę, czas, natężenie prądu, temperaturę termodynamiczną i jasność [48].

Tabela 1. Skróty jednostek wtórnych

Nazwa	Skrót	Krotność	Nazwa	Skrót	Krotność
peta	P	10^{15}	decy	d	10^{-1}
tera	T	10^{12}	centy	c	10^{-2}
giga	G	10^{9}	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^{6}	mikro	µ	10^{-6}
kilo	k	10^{3}	nano	n	10^{-9}
hekto	h	10^{2}	piko	p	10^{-12}
deka	da	10^{1}	femto	f	10^{-15}

Oprócz jednostek podstawowych, stosuje się jednostki pochodne, które są powiązane z jednostkami podstawowymi odpowiednimi zależnościami.

Jednostki pochodne to np. [N] = [kg$\cdot$m$\cdot$s^{-2}], [J] = [kg$\cdot$m$^2\cdot$s^{-2}], [Pa] = [kg $\cdot$ m$^{-1}\cdot$s^{-2}], [W] = [kg$\cdot$m$^2\cdot$s^{-3}] i inne.

Zarówno jednostki podstawowe, jak też jednostki pochodne mogą być jednostkami głównymi lub wtórnymi.

Jednostka główna posiada wartość równą 1, a jej oznaczenie nie ma przedrostka, np. [N], [kg], [J], [s], [Pa], [m], [W].

Jednostka wtórna jest większa lub mniejsza od jednostki głównej i wyróżnia ją przedrostek, określający wielokrotność jej zwiększenia lub zmniejszenia. Na przykład, [kW] = 10^3 [W], [cm] = 10^{-2} [m], [ms] = 10^{-3} [s], [µm] = 10^{-6} [m], [MPa] = 10^6 [Pa].

Jednostka pozaukładowa wywodzi się z tradycji jej stosowania w określonej dziedzinie. Często w motoryzacji jednostką mocy jest koń mechaniczny [KM] = 0.736 [kW], w technice cieplnej kaloria [cal] = 4.19 [J], natomiast w meteorologii tor, który jest równy ciśnieniu wywieranemu przez jeden milimetr słupa rtęci: [Tr] = [mm Hg] = 1.333...$\cdot 10^2$ [Pa].

2. Model i modelowanie

Zanim na Ziemi pojawił się człowiek rozumny, istniał już wszechświat, systemy gwiezdne i planetarne. Na Ziemi funkcjonowały systemy wodne, tektoniczne, kształtowała się flora i fauna. Człowiek myślący rozwijał swoje zdolności twórcze, aby z czasem przekształcić je w umiejętność wytwarzania dóbr materialnych. Wytwarzanie dóbr materialnych i kojarzenie rzeczywistości o charakterze abstrakcyjnym angażowało umysł i model, który był wirtualnym wzorcem do materializacji. Różnorodność powstałych rozwiązań była przyczynkiem do ich badania i ulepszania w celach utylitarnych. Było to zatem modelowanie obiektów rzeczywistych, wykształconych w naturze lub stworzonych przez innych ludzi. Równocześnie, w miarę poznawania środowiska i zauważenia możliwości jego wykorzystania do celów praktycznych (bieżących i perspektywicznych), a często poznawczych dla zaspokojenia ludzkiej ciekawości, człowiek wytworzył modele systemów występujących w naturze.

Model (z łac. *modulus*) – miara, wzór, ideał, przedmiot do naśladowania.

Model (fizyczny, matematyczny i symulacyjny) – układ, którego zadaniem jest imitowanie w celach poznawczych wyróżnionych cech innego układu, zwanego oryginałem.

Model teoretyczny – hipotetyczna konstrukcja myślowa, będąca uproszczonym obrazem fragmentu rzeczywistości, w którym dla ułatwienia rozwiązania danego zagadnienia wyeliminowano elementy nieistotne dla osiągnięcia celu. Modele teoretyczne wprowadza się do nauki ze względu na ich przydatność w tworzeniu teorii.

Model realny – przedmiot lub układ przedmiotów, spełniających założenia danej teorii, dostatecznie podobny do układu badanego, ale prostszy i bardziej dostępny do zbadania.

Model fizyczny, matematyczny i symulacyjny. Dla zbadania obiektu lub zjawiska, najpierw należy opracować model fizyczny, ujmujący zgodne z definicją modelu: wyidealizowane zjawiska, elementy i parametry. Model fizyczny jest punktem wyjścia do stworzenia modelu matematycznego, który jest formalnym opisem wyidealizowanego obiektu. Rozwiązując równania dynamiki zmian stanu lub równania algebraiczne, stanowiące model matematyczny dla wprowadzonych fizycznych parametrów obiektu, uzyskuje się odpowiedzi symulowanego układu na wewnętrzne i zewnętrzne wymuszenia. System wprowadzania wymuszeń i pozyskiwania odpowiedzi tego obiektu jest nazywany modelem symulacyjnym. Uzyskane w wyniku eksploracji modelu symulacyjnego odpowiedzi, a także wymuszenia, w zależności od stopnia zaawansowania informatycznego, mogą być podawane w postaci cyfrowej, graficznej lub monitorowej (przestrzennej i przestrzenno-czasowej).

W celu opracowania modelu stosowane są:

1. *Metody teoretyczne* oparte na analizie wymiarowej, zasadach analogii lub wykorzystujące prawa fizyki i analizy matematycznej.
2. *Metody teoretyczno-doświadczalne*, umożliwiające: a) użycie obiektu rzeczywistego do podania opisu matematycznego lub określenia jego wybranych cech na podstawie wyników badań modelu odtworzonego w skali (zgodnie z zasadami podobieństwa); b) powiązanie równań dobranych dla badanego, rzeczywistego obiektu z uzyskanymi doświadczalnie parametrami, dającymi najlepsze przybliżenie w wyznaczonym przedziale wartości. Jeżeli istnieje wykres lub wyniki doświadczalne zapisane w tabeli, gdzie do przeprowadzenia operacji matematycznych jest potrzebna funkcja elementarna, wtedy dobiera się funkcję aproksymującą w postaci ogólnej:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{2.1}$$

   lub inną funkcję nieliniową:

$$\varphi(x) = A e^{rx} \sin(\omega t + \alpha) + \cdots + B e^{sx} + \cdots + K\,, \tag{2.2}$$

   poszukując parametrów najlepiej ją przybliżających w zadanym przedziale zmienności $x \in [c, d]$.
3. *Metody doświadczalne*, wykorzystujące zapis wartości parametrów modelowych punktów obiektu w funkcji zmiennych niezależnych, np. czasu, drogi, prędkości i innych w celu wysterowania stanu obiektu i reakcji na stany niepożądane.
4. *Analiza modalna* zbudowana na metodach badania właściwości dynamicznych złożonych obiektów mechanicznych. Jednym z złożeń metod należących do tej dziedziny jest holistyczny model energetyczny układu konstrukcyjnego obiektu.

Holizm (z gr. *holos* – całość), to pogląd przeciwstawny redukcjonizmowi, według którego wszelkie zjawiska tworzą układy całościowe, podlegające swoistym prawidłowościom. O tych układach nie można wnioskować na podstawie wiedzy o prawidłowościach rządzących ich składnikami. Całości nie daje się sprowadzić do sumy jej składników.

Model opracowany w wyniku analizy modalnej pozwala przewidywać dynamikę zachowania obiektu, na który działają wymuszenia zaburzające jego równowagę.

Stosowanie analizy modalnej wymaga spełnienia szeregu warunków, wśród których wyróżnimy [89]:

– liniowość układu,

– utrzymanie stałych współczynników równań podczas badań,
– obserwowalność i mierzalność układu,
– spełnienie zasady wzajemności Maxwella,
– małe lub proporcjonalne tłumienie.

Rodzaje analizy modalnej:

* *teoretyczna* – polega na wprowadzeniu opisu teoretycznego badanego obiektu;
* *eksperymentalna* – polega na zastosowaniu zaplanowanego i sterowanego doświadczenia;
* *eksploatacyjna* – prowadzona podczas eksploatacji przy niezmiennie usytuowanych punktach pomiaru w odpowiedzi badanego obiektu na wymuszenia eksploatacyjne.

Modeluje się zjawiska fizyczne oraz obiekty materialne, przy czy celem modelowania jest obniżenie kosztów wytwarzania i eksploatacji obiektów rzeczywistych.

W technice, modelowanie przeprowadza się w celu:

– wykonywania badań naukowych,
– weryfikacji koncepcji,
– pozyskania informacji użytecznych w projektowaniu konstrukcji i systemów sterowania,
– identyfikacji istniejących obiektów materialnych.

Identyfikacja polega na znajdowaniu relacji między systemem rzeczywistym a modelem. Stany dynamiczne systemu rzeczywistego są porównywane z rozwiązaniami generowanymi przez model [36].

Relacje między systemem rzeczywistym a modelem określa zasadność:

– *replikatywna*, jeśli dane generowane przez model odpowiadają danym uzyskiwanym z obiektu rzeczywistego;
– *predykcyjna*, jeśli zgodność relacji między systemem rzeczywistym a modelem jest znana przed uzyskaniem danych z systemu rzeczywistego;
– *strukturalna*, jeśli model nie tylko generuje takie same dane jak obiekt rzeczywisty, ale też działa w podobny sposób.

2.1. Teoretyczne metody modelowania

2.1.1. Modelowanie na podstawie analizy wymiarowej i kryteriów podobieństwa

Analiza wymiarowa zajmuje się działaniami na wielkościach wymiarowych, w których występuje mnożenie i potęgowanie z wykładnikiem rzeczywistym. Analiza równań wymiarowych umożliwia ustalenie wzajemnych zależności wielkości fizycznych, mających udział w rozpatrywanym zjawisku. Jest narzędziem stosowanym w fizyce i chemii, ale dobre rezultaty daje stosowanie analizy wymiarowej w mechanice, gdzie istotne korzyści wynikają ze stosowania zasad podobieństwa. Ważnym krokiem w opracowaniu zasad analizy wymiarowej było twierdzenie π, sformułowane w 1914 roku przez Buckinghama na gruncie algebry liniowej [95].

Jeżeli szukamy związku:

$$f(Q_1, Q_2, \dots Q_n) = 0, \tag{2.3}$$

między wymiarowymi wielkościami fizycznymi $Q_1 \dots Q_n$, to nasze oczekiwania będą spełnione, gdy znajdziemy zależność postaci:

$$[\pi] = Q_1^{k_1} \cdot Q_2^{k_2} \cdots Q_n^{k_n}, \tag{2.4}$$

gdzie π jest liczbą bezwymiarową, która w szczególnym przypadku może przyjmować wartość 1.

Wielkości $Q_1 \dots Q_n$ można wyrazić przez podstawowe wielkości wymiarowe $A_1 \dots A_m$, składające się z $m \leq n$ wyrazów zwanych bazą. Tutaj *baza*, to zbiór jednostek charakteryzujących się tym, że żaden z jego elementów nie da się przedstawić jako wynik potęgowania pozostałych – tymi jednostkami w mechanice są [m], [kg], [s]. Wielkość wymiarową Q_n można wtedy przedstawić jako wynik potęgowania wielkości wymiarowych bazy A_m:

$$\begin{aligned} [Q_1] &= A_1^{a_{11}} \cdot A_2^{a_{21}} \cdots A_m^{a_{m1}}, \\ [Q_2] &= A_1^{a_{12}} \cdot A_2^{a_{22}} \cdots A_m^{a_{m2}}, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ [Q_n] &= A_1^{a_{1n}} \cdot A_2^{a_{2n}} \cdots A_m^{a_{mn}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Z równań (2.4) i (2.5) wynika następujący układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} Q_1^{k_1} &= \left(A_1^{a_{11}} \cdot A_2^{a_{21}} \cdots A_m^{a_{m1}}\right)^{k_1}, \\ Q_1^{k_2} &= \left(A_1^{a_{12}} \cdot A_2^{a_{22}} \cdots A_m^{a_{m2}}\right)^{k_2}, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ Q_1^{k_n} &= \left(A_1^{a_{1n}} \cdot A_2^{a_{2n}} \cdots A_m^{a_{mn}}\right)^{k_n}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Zakładając, że istnieje bezwymiarowa liczba π, niezbędna do obliczenia szukanych wykładników $k_1 \ldots k_n$, to wyrażenie (2.4) można przedstawić w formie zależności (2.6), jak następuje:

$$
\begin{aligned}
&[\pi] = A_1^0 \cdot A_2^0 \cdots A_m^0 = \\
&\quad \{A_1^{a_{11}} \cdots A_m^{a_{m1}}\}^{k_1} \cdot \{A_1^{a_{12}} \cdots A_m^{a_{m2}}\}^{k_2} \cdots \{A_1^{a_{1n}} \cdots A_m^{a_{mn}}\}^{k_n}.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Wykorzystując podstawowe wielkości wymiarowe $A_1 \ldots A_m$ można zapisać:

$$
\begin{aligned}
A_1^0 =& A_1^{a_{11}k_1} \cdot A_1^{a_{12}k_2} \cdots A_1^{a_{1n}k_2}, \\
A_2^0 =& A_2^{a_{21}k_1} \cdot A_1^{a_{22}k_2} \cdots A_1^{a_{2n}k_2}, \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
A_m^0 =& A_m^{a_{m1}k_1} \cdot A_m^{a_{m2}k_2} \cdots A_m^{a_{mn}k_2}.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Logarytmując związki (2.8) uzyskuje się układ równań:

$$
\begin{aligned}
A_1 \quad &\rightarrow \quad 0 = a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n, \\
A_2 \quad &\rightarrow \quad 0 = a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n, \\
\vdots \quad & \qquad \qquad \vdots \\
A_m \quad &\rightarrow \quad 0 = a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Ten liniowy układ, składający się z m równań i n niewiadomych $k_1 \ldots k_n$ opisuje macierz $M_{(m \times n)}$ dana w tabeli 2, pozwalająca wyznaczyć funkcje:

$$
f(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-r}) = 0. \tag{2.10}
$$

Tabela 2. Macierz $M_{(m \times n)}$ liniowego układu m równań i n niewiadomych $k_1 \ldots k_n$

	Q_1 k_1	Q_2 k_2	$\ldots$ $\ldots$	Q_n k_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Zgodnie z twierdzeniem π, zwanym twierdzeniem Buckinghama, *funkcja n wielkości wymiarowych $Q_1 \ldots Q_n$ i m wielkości podstawowych $A_1 \ldots A_n$,* *tworzących macierz wymiarową M rzędu $r \leq m$ ma $n - r$ bezwymiarowych rozwiązań, określających funkcje (2.10) wielkości π, skąd znajdujemy:*

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-r}) \,. \tag{2.11}$$

Warunek konieczny i dostateczny podobieństwa dwóch procesów jest spełniony wtedy, gdy są one jakościowo jednakowe oraz wszystkie liczby podobieństwa, określające te procesy są parami równe, tzn. $\pi_1' = \pi_1''$, $\pi_2' = \pi_2''$, ..., $\pi_{n-r}' = \pi_{n-r}''$.

Procesy jakościowo jednakowe mają takie same opisy matematyczne, ale różnią się wartościami wielkości wymiarowych.

Metoda modelowania polega na odtworzeniu procesów rzeczywistych i badaniu ich na modelach numerycznych, jednakowych z tymi procesami pod względem jakościowym. Wyniki analizy i symulacji modelu numerycznego można rozszerzyć na obiekty rzeczywiste, jeśli spełnia się wyżej sformułowane warunki.

Z przedstawionych definicji wynika metodyka opracowania modelu matematycznego, wg której należy:

1. określić fizyczne wielkości wymiarowe oraz ustalić ich liczbę n;
2. ustalić liczbę elementów bazy A_m (np. w mechanice $m = 3$, ponieważ w układzie miar LMT obowiązują: [m], [kg], [s]);
3. określić rząd macierzy $r = m$, liczbę wielkości π $(i = n - r)$ i utworzyć macierz $M_{(m \times n)}$;
4. utworzyć postać kanoniczną i obliczyć wykładniki k_n wielkości wymiarowych Q_n.

Sposób poszukiwania wykładników k_n przybliży poniższe zadanie.

Znaleźć zależność siły dośrodkowej F_d od masy M, ciała poruszającego się ruchem jednostajnym z prędkością V po okręgu o promieniu R. Poszukiwana zależność funkcyjna to $F_d = f(M, V, R)$.

Mając 4 wielkości wymiarowe n i 3 elementy bazy m, liczba i, bezwymiarowych wielkości π wyniesie 1. Stąd, na podstawie równań (2.9) można zapisać:

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 + a_{14}k_4 = 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 + a_{24}k_4 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 + a_{34}k_4 = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Posługując się tabelą 2 i układem równań algebraicznych (2.12) budujemy macierz M, rozwiniętą w tabeli 3, ułatwiającą znalezienie współczynników a_{mn} równań, w których niewiadomymi są wykładniki k_i $(i = 1 \ldots 4)$.

Tabela 3. Rozwinięta macierz $M_{(3\times4)}$ liniowego układu 3 równań i 4 niewiadomych $k_1 \dots k_4$

WIELK. WYM.		$Q_1^{k_1}$ $m^{a_{11}} kg^{a_{21}} s^{a_{31}}$ $F_d^{k_1}$	$Q_2^{k_2}$ $m^{a_{12}} kg^{a_{22}} s^{a_{32}}$ M^{k_2}	$Q_3^{k_3}$ $m^{a_{13}} kg^{a_{23}} s^{a_{33}}$ V^{k_3}	$Q_4^{k_4}$ $m^{a_{14}} kg^{a_{24}} s^{a_{34}}$ R^{k_4}
SYS. UKŁ.	JEDN. PODST.	[F_d] $m \cdot kg \cdot s^{-2}$	[M] kg	[V] $m \cdot s^{-1}$	[R] m
L M	[m]	$a_{11}[\mathrm{M}] = 1$	$a_{12}[\mathrm{M}] = 0$	$a_{13}[\mathrm{M}] = 1$	$a_{14}[\mathrm{M}] = 1$
K K	[kg]	$a_{21}[\mathrm{K}] = 1$	$a_{22}[\mathrm{K}] = 1$	$a_{23}[\mathrm{K}] = 0$	$a_{24}[\mathrm{K}] = 0$
T S	[s]	$a_{31}[\mathrm{S}] = -2$	$a_{32}[\mathrm{S}] = 0$	$a_{33}[\mathrm{S}] = -1$	$a_{34}[\mathrm{S}] = 0$

Po sporządzeniu tablicy i wpisaniu jednostek przy wielkościach, analizujemy wymiar wielkości niezależnych względem wymiaru układu jednostek podstawowych i określamy współczynniki macierzy $M_{(3\times4)}$. Wobec znajomości wykładnika $k_1 = 1$, jako wykładnika wielkości szukanej, wszystkie współczynniki pierwszej kolumny równania (2.9) są znane. Celem obliczenia wykładników k_2, k_3, k_4 przekształcamy to równanie do postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned} a_{12}k_2 + a_{13}k_3 + a_{14}k_4 &= -a_{11}k_1, \\ a_{22}k_2 + a_{23}k_3 + a_{24}k_4 &= -a_{21}k_1, \\ a_{32}k_2 + a_{33}k_3 + a_{34}k_4 &= -a_{31}k_1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Po wstawieniu z tabeli 3 do równań (2.13) znanych wartości współczynników a_{mn} i $k_1 = 1$, otrzymamy szczegółowy układ równań:

$$\begin{aligned} 0 \quad + 1 \cdot k_3 + 1 \cdot k_4 &= -1, \\ 1 \cdot k_2 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad &= -1, \\ 0 \quad - 1 \cdot k_3 + \quad 0 \quad &= \quad 2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Układ równań (2.14) rozwiązujemy metodą wyznaczników, tzn.:

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \; W_{k_2} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \; W_{k_3} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \; W_{k_4} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

gdzie wykładniki wielkości wymiarowych wynoszą:

$$\det(W) = -1, \quad \det(W_{k_2}) = 1, \quad \det(W_{k_3}) = 2, \quad \det(W_{k_4}) = -1,$$

$$k_2 = \frac{W_{k_2}}{W} = -1, \quad k_3 = \frac{W_{k_3}}{W} = -2, \quad k_4 = \frac{W_{k_4}}{W} = 1.$$

Następnie stosujemy wzór (2.4), obliczając bezwymiarową liczbę $[\pi]$:

$$[\pi] = F_d^{k_1} \cdot M^{k_2} \cdot V^{k_3} \cdot R^{k_4}. \tag{2.15}$$

Po podstawieniu obliczonych wartości wykładników wielkości wymiarowych i przyjęciu $[\pi] = 1$, poszukiwany wzór na siłę dośrodkową F_d oblicza się ze wzoru:

$$F_d^{k_1} = [\pi] \cdot M^{-k_2} \cdot V^{-k_3} \cdot R^{-k_4} = M \cdot V^2 \cdot R^{-1}. \tag{2.16}$$

Otrzymaliśmy model matematyczny przyjętego, idealizowanego modelu fizycznego analizowanego procesu. Przykładowo, jeśli założyć istnienie pola grawitacyjnego Ziemi i siły aerodynamicznej zależnej od geometrii i środowiska, w którym porusza się ciało wirujące, to model byłby bardziej złożony, a zjawisko określałaby więcej niż jedna liczba podobieństwa. Wyznaczenie wartości poszczególnych liczb podobieństwa $\pi_1 \dots \pi_n$ wymaga przeprowadzenia badań na modelu. Mogłoby się okazać, że to złożone zagadnienie nie jest rozwiązywalne metodami analizy wymiarowej.